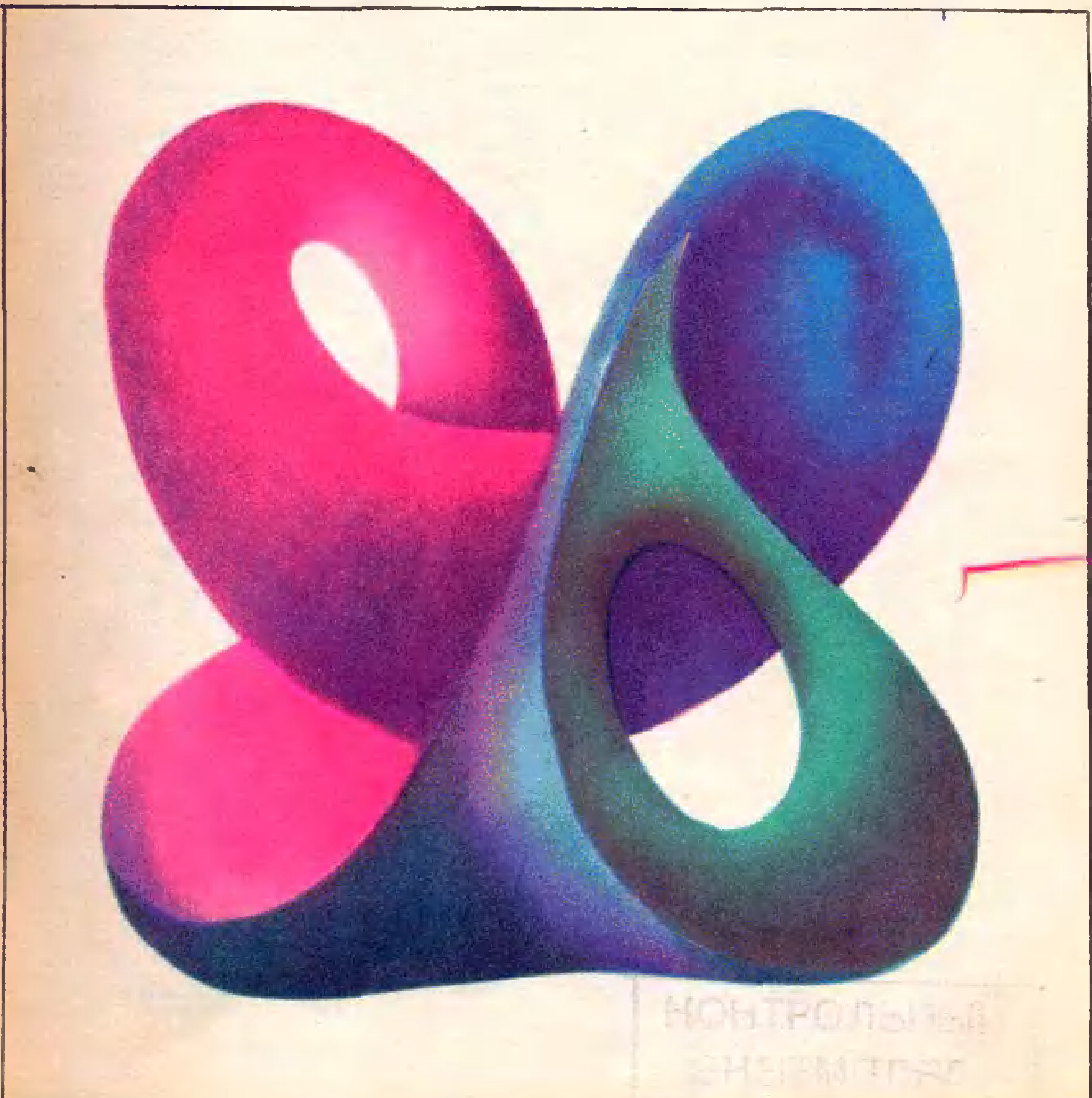
Научно-популярный физико-математический

Квант

9

1970

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



На первой странице обложки: «Одна из алгебраических поверхностей третьего порядка». Художник Е. П. Леонов.

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник Е. П. Леонов
Технический редактор Т. М. Макарова
Корректор И. Б. Мамулова
Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел: 234—08—11

Сдано в набор 28.05.1970 г. Под. к печати 11.08.1970 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 5,56. Уч.-изд. л. 5,58. Тираж 174330 экз Т-09853.
Цена 30 коп. Заказ 871
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов Московской области

Научно-популярный физико-математический

9

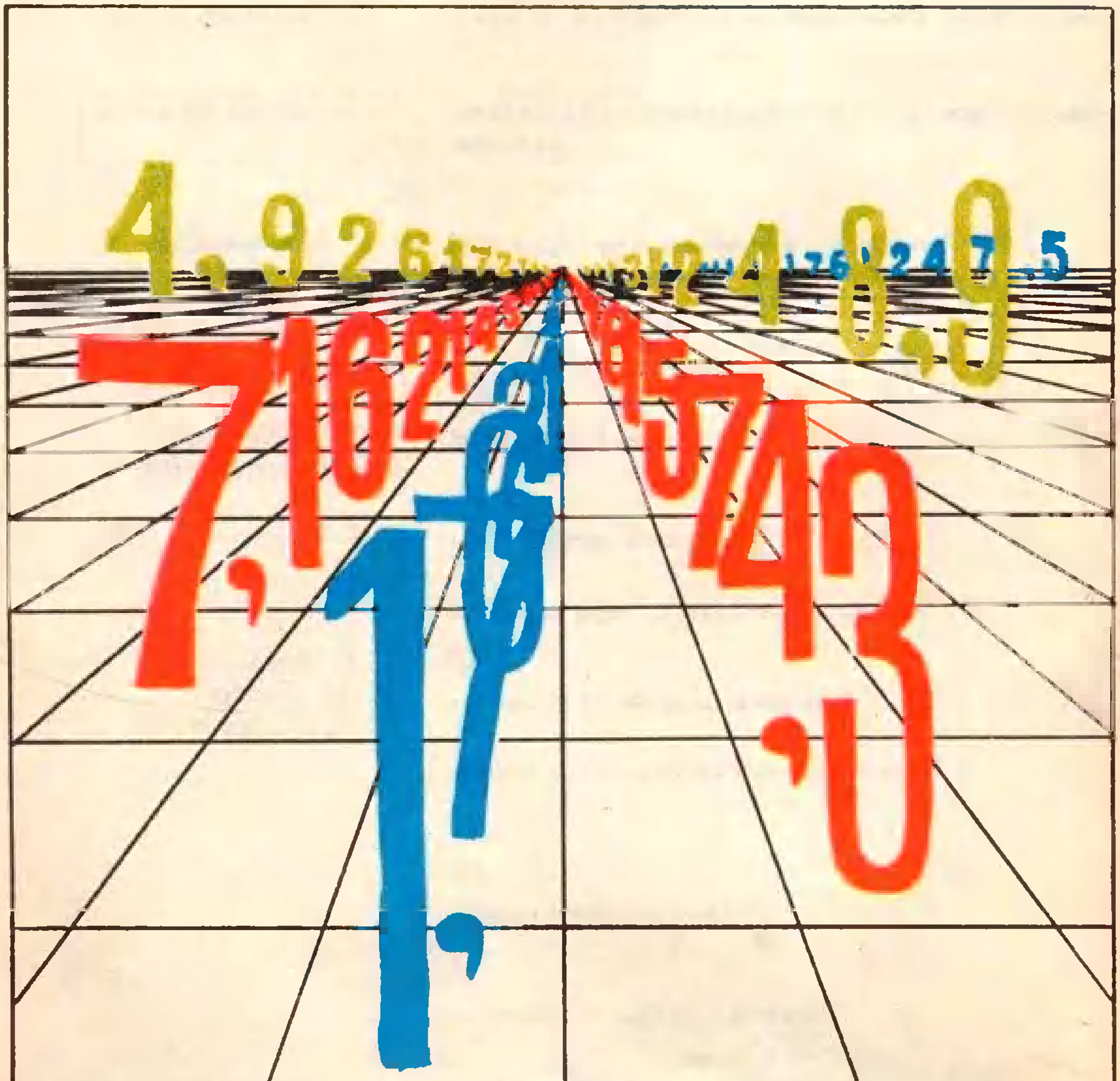
Квант

журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

В НОМЕРЕ:

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь...

С. Г. Гиндикин



Никто не обнимет необъятного.

Иные настойчиво утверждают, что жизнь каждого записана в книге Бытия.

Козьма Прутков

Так как мы сами конечны, то можем оперировать только с конечными предметами.

Человек, каким бы он ни был болтуном, никогда в своей жизни не произнесет более миллиарда слов.

Анри Пуанкаре

«Вещественными числами называются бесконечные десятичные дроби» *). Дав такое определение, мы начинаем время от времени произносить фразу, стоящую в заглавии статьи. А что она означает? Не противоречим ли мы, намереваясь рассмотреть бесконечную десятичную дробь, житейской мудрости Козьмы Пруткова или аналогичному высказыванию великого французского математика А. Пуанкаре, фигурирующим в качестве эпиграфов к статье? Конечную десятичную дробь можно «рассмотреть», например, написав ее на доске и посмотрев на написанное. В случае же бесконечной дроби мы, разумеется, лишены такой возможности. Этому в разной степени препятствуют ограниченность размеров классной доски, человеческой жизни, нашей Галактики и т. д. Однако договоримся, что в этой статье мы будем ориентироваться на мифического великана, которому все эти ограничения нипочем и любые конечные рассмотрения под силу.

С другой стороны, нетрудно понять, что бесконечность десятичной дроби еще не обязательно означает ее «необъятность». Так, при изучении рациональных чисел иногда используется их представление в виде бесконечных периодических десятичных дробей, а для задания последних достаточно указать конечное число десятичных знаков, предшествующих периоду, и сам период (тоже конечное число цифр). В результате можно рассматривать такие дроби, не вступая в противоречие с нашей «конечностью». Арифметическая и геометрическая прогрессии (бесконечные последовательности!) определяются по двум числам (первый член и разность или знаменатель). Вы наверняка знаете и другие примеры бесконечных последовательностей, задание которых требует лишь конечной информации (например, формулы общего члена). Все это наводит на мысль, что криминальность с точки зрения Козьмы Пруткова фразы, приведенной в заглавии, не столь безусловна, а поэтому требует более тщательного исследования, к которому мы и переходим.

Итак, мы знаем, что существуют бесконечные десятичные дроби, допускающие конечное описание. Договоримся называть бесконечную десятичную дробь «объятной», если существует ее «словесный портрет» — конечных размеров описание на русском языке, ее однозначно задающее (т. е. этому описанию удовлетворяет только одна дробь). Если «словесного портрета» дроби не существует, то дробь называется «необъятной». Наша цель — доказать существование «необъятных» дробей.

*) Читателю не обязательно знать заранее, что такое бесконечная десятичная дробь.

Ограничимся лишь дробями, заключенными между 0 и 1, то есть выражениями вида

$$0,\ \alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots, \qquad (1)$$

где α_k, $1\leq k<\infty$,— какие-то цифры 0, 1, ..., 8, 9. В теории вещественных чисел доставляет много хлопот тот факт, что всякая дробь с «хвостом» из девяток (все знаки, начиная с некоторого места, равны 9) равна некоторой дроби с «хвостом» из нулей (например, $0{,}099\ldots=0{,}100\ldots$). Чтобы их избежать, не будем рассматривать дроби, в записи которых встречается девятка. Итак, мы будем рассматривать дроби вида (1), то есть последовательности цифр $0,\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots$, где α_k могут быть равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8*). Мы докажем, что даже среди таких дробей есть «необъятные».

Как можно это доказать?

Рассмотрим вначале аналогичную ситуацию, относящуюся, правда, к конечным множествам (для лучшего понимания опишем ее в шутливой форме). Директору кинотеатра стало известно, что на сеансе присутствовало сто зрителей, а касса продала девяносто билетов. Вы, вероятно, не удивитесь, что из сопоставления этих двух фактов он сделал вывод, что в зале находились безбилетники. Он просто заметил, что зрителей больше, чем билетов, и на всех зрителей билетов хватить не могло. Обратите внимание, что это рассуждение дает возможность лишь доказать существование безбилетного зрителя, а выявление конкретного «зайца» требует дополнительных исследований (например, проверки билетов при выходе).

В семидесятых годах прошлого века Г. Кантор **) придумал замечательный способ проводить аналогичные рассуждения для бесконечных множеств. Этим способом мы и воспользуемся.

Интересующий нас результат получается из сопоставления двух фактов.

Ф а к т п е р в ы й. «Объятные» дроби можно перенумеровать, то есть присвоить каждой некоторый номер (натуральное число) так, что разные дроби получат разные номера, а каждое натуральное число будет номером некоторой дроби.

Ф а к т в т о р о й. Если нам дан некоторый набор занумерованных дробей, то мы можем построить дробь, которая при этом не получила номера, то есть все бесконечные дроби занумеровать нельзя.

В результате получается, что, хотя множество «объятных» дробей бесконечно, оно в некотором смысле «меньше», чем множество всех дробей, а поэтому, рассуждая, как директор кинотеатра, мы можем сделать вывод: существует «необъятная» дробь.

Начнем со второго утверждения. Процесс, которым мы воспользуемся, называется диагональным. Нам потребуется следующая таблица замены цифр:

$$0\to1\quad 1\to2\quad 2\to3\quad 3\to4\quad 4\to5$$
$$5\to6\quad 6\to7\quad 7\to8\quad 8\to0$$

Пусть имеется некоторая занумерованная последовательность дробей. Выпишем все дроби сверху вниз в порядке их номеров (просим не смущаться тем, что получится бесконечная таблица). Выделим диагональ (для дроби с номером k берем k-й знак) и, заменив цифры, стоящие на диагонали, на соответствующие по таблице, вынесем их в правый столбец.

Рассмотрим дробь β, у которой десятичными знаками являются элементы этого столбца (занумерованные сверху вниз). Среди знаков β не встретится 9, так как ее нет в таблице замены цифр.

---

*) Проницательный читатель безусловно обратит внимание при чтении дальнейшего текста, что все рассмотрения были бы столь же содержательны, если бы мы ограничились только двумя цифрами, например 0 и 1.

**) Г. К а н т о р (1845—1918) — создатель теории бесконечных множеств.

Пример.

№	Занумерованные дроби	β = 0,
1.	0, 1 2 3 4 5 6 7 8 0 1…	2
2.	0, 2 4 6 1 4 5 3 2 1 4…	5
3.	0, 1 3 2 4 5 3 1 7 8 2…	3
4.	0, 0 1 4 6 7 2 7 8 0 1…	7
5.	0, 4 2 3 1 2 1 4 5 6 0…	3
6.	0, 5 6 7 2 4 5 8 0 1 2…	6
7.	0, 2 4 3 5 6 7 8 0 2 4…	0
8.	0, 7 5 4 6 2 1 2 0 1 2…	1
9.	0, 8 0 8 0 1 0 2 2 2 2…	3

. . . .

$$\beta = 0,253736013\ldots$$

Задача 1. Доказать, что построенная дробь β не входит в исходную последовательность.

Итак, второй факт доказан, перейдем к первому.

Сначала обсудим поучительную историю об универсальной библиотеке.

Сколько томов должна содержать библиотека, включающая всевозможные книги, которые когда-либо были написаны, пишутся сейчас или будут написаны в будущем? Как правило, человека, впервые услышавшего этот вопрос, удивляет, что такая универсальная библиотека состоит из конечного числа книг (ср. второй афоризм К. Пруткова). Кажется, все это противоречит нашим представлениям о безграничном прогрессе человечества… Но обратимся к выкладкам. Будем считать, что все книги состоят из 500 страниц (иначе будем разбивать их на тома) и что каждая страница состоит из 40 строк по 50 знаков в каждой. Теперь обсудим вопрос о полиграфической базе. Будем интересоваться книгами на русском языке. Для набора потребуются как знаки (литеры), отвечающие буквам, знакам препинания, так и некоторые знаки для набора специальных текстов (впрочем, если не экономить места, можно заменить формулы, таблицы и т. д. их словесными описаниями). Так или иначе, будем считать, что достаточно ста литер. Нам удобно ввести специальный знак пробела между словами. Набирая этот знак достаточно много раз подряд, можно устраивать сколь угодно длинные пробелы (в частности, благодаря этому в число пятисотстраничных книг можно включить книги, состоящие из меньшего числа непустых страниц). В результате книгу можно представить себе как последовательность из $50\times40\times\times500=10^6$ знаков, каждый из которых может быть одним из 100 знаков наборной азбуки (литер), т. е. как одно слово из миллиона букв в языке, алфавит которого состоит из 100 букв. Обратите внимание, что это сведение стало возможным благодаря введению знака пробела, иначе последовательность знаков могла бы не определять книгу однозначно (ее можно по-разному разбить на слова).

Задача 2. Доказать, что число различных слов длины n в языке, алфавит которого состоит из k букв, равно k^n *).

Совет. Вначале рассмотреть пример нашей десятичной системы счисления: различных чисел из n цифр существует 10^n (от 000…0 до 999…9).

Из задачи 2 следует, что число томов универсальной библиотеки записывается «всего лишь» единицей с двумя миллионами нулей. В число этих томов войдут все вершины мудрости, в том числе и не постигнутые человечеством, но большинство книг будет содержать бессмысленные тексты. Будет книга, состоящая из одних букв «а» (впрочем, будет и книга из одних точек, будет и «пустая» книга, сплошь состоящая из знаков пробела).

Теперь договоримся оформлять «словесный портрет» десятичной дроби в виде книги. Будут ли содержаться эти книги в универсальной библиотеке? Вообще говоря, нет. Дело в том, что, говоря об универсальной библиотеке, мы исходили все таки из предположения, что книги имеют размеры, реальные с точки зре-

*) Слово — это просто конечная последовательность букв. Мы не интересуемся вопросом его осмысленности.

ния нашей житейской практики. Однако, если отказаться от реалистичности в этом ее последнем пристанище (а помните, мы ориентируемся на гиганта, которому она не присуща), нельзя исключить того, что некоторые «словесные портреты» могут занимать книги, превышающие по размеру книги из универсальной библиотеки. В связи с этим введем понятие ультрауниверсальной библиотеки. Так мы будем называть библиотеку, содержащую все книги сколь угодно больших размеров. Назовем размером книги число знаков в ней. Договоримся расставлять книги по следующему принципу: на полке с номером N будут находиться все книги размера N. В частности, вся универсальная библиотека скромно займет одну полку с номером $N=10^6$. Итак, ультрауниверсальная библиотека будет состоять уже из бесконечного числа томов: в ней бесконечное число полок. Однако на каждой полке будет стоять конечное число книг. Из задачи 2 видно, что на полке с номером N находится 100^N книг. А отсюда следует, что все книги можно перенумеровать!

Проведем инвентаризацию следующим образом. Предварительно фиксируем порядок книг на полках ультрауниверсальной библиотеки. Для этого вначале укажем порядок букв в нашем алфавите (их ведь конечное число — 100), а затем расставим книги в так называемом лексикографическом порядке, принятом в словарях (из двух слов-книг раньше идет то, у которого номер первой буквы меньше; если первые буквы совпадают, то сравниваются вторые буквы слова и т. д.). Расставив книги на полках, начнем нумеровать их с первой полки (на ней стоят книги, состоящие из одной буквы!). Закончив нумеровать очередную полку, переходим к следующей. Поскольку число книг на каждой полке конечно, каждая книга рано или поздно получит номер. Инвентаризация проведена! Теперь заметим, что в ультрауниверсальной библиотеке содержатся словесные портреты всех «объятных» десятичных дробей, а поэтому, двигаясь по нумерации книг в библиотеке, мы можем пронумеровать все эти портреты, а значит, и «объятные» дроби (нужно помнить, что у одной дроби может быть несколько «словесных портретов», и следить, не присвоен ли этой дроби уже какой-то номер ранее; впрочем, не страшно, если одну дробь мы занумеруем несколько раз).

Существование «необъятных» дробей доказано.

Для тех, кто читал книгу Н. Я. Виленкина «Рассказы о множествах», интерпретируем полученный результат несколько иначе. Помните, как телеграф необыкновенной гостиницы, обнаруженной Йоном Тихим, передавал телеграммы, состоящие из бесконечной последовательности точек и тире? Представьте себе, что на другом телеграфе, принимающем эти телеграммы, захотели придумать такой способ их расшифровки, чтобы каждой бесконечной телеграмме отвечало конечное слово в каком-то алфавите. Мы доказали, что такого способа не существует (слова всегда можно занумеровать, а телеграммы — нет). Можно сказать еще, что не существует способа дать всем точкам единичного отрезка различные имена (конечные).

Мы доказали, что «необъятные» дроби существуют, но, подобно вышеупомянутому директору кинотеатра, не в состоянии предъявить конкретную «необъятную» дробь. А что, если попробовать? Воспользуемся однажды выручившим нас диагональным процессом. Ведь мы ввели порядок книг в библиотеке, а значит, стала фиксированной нумерация «объятных» дробей. Используя факт 2, построим незанумерованную бесконечную десятичную дробь β.

Итак, мы превзошли директора кинотеатра, предъявив конкретную «необъятную» дробь. Но что же получилось? Для «необъятной» дроби по определению не должно существовать конечного описания, а для «необъятной» дроби β такое описание построено; им является предыдущий текст этой статьи (ведь вы не сомневаетесь, что он конечен?). Не предъявлен только занумерованный алфавит, но и в этом сомневаться не приходится.

Выходит, мы пришли к противоречию? Приятно прийти к противоречию, если перед этим предположили противное тому, что требуется доказать. Но, как вы, вероятно, помните, мы такого предположения не делали. Как же быть?

Единственный вывод, который можно сделать, состоит в том, что использовавшееся нами понятие «объятной» дроби, как дроби, допускающей конечное описание, является некорректным и привело к противоречию. Для подкрепления уверенности в этом приведем еще один пример. Он будет касаться уже не бесконечных дробей, а натуральных чисел. Каждое такое число можно описать конечным текстом (например, назвав его), так что о «необъятности» говорить не приходится.

Однако найдутся числа, описаний которых нет в нашей универсальной библиотеке, то есть такие числа, для которых не существует описания на русском языке, содержащего не более миллиона знаков. Последнее следует из того, что число томов в универсальной библиотеке конечно. Среди натуральных чисел, не получивших описания, существует наименьшее. Мы доказали следующее утверждение:

Существует наименьшее натуральное число, которое нельзя задать текстом на русском языке, содержащим не более одного миллиона знаков.

Выделенная фраза содержит сто тридцать пять знаков. Но ведь сто тридцать пять меньше миллиона, а поэтому нас можно поздравить еще с одним противоречием: приведенная фраза однозначно описывает упомянутое число!

Настало время критиковать понятие «словесный портрет». Как вы думаете, можно ли считать описаниями такие фразы:

«α — бесконечная десятичная дробь, знаки которой с номерами, делящимися на число шагов, сделанных Наполеоном в день битвы при Ватерлоо, совпадают с соответствующими знаками числа π, а остальные знаки равны нулю».

«Для определения k-го знака дроби δ нужно сосчитать число голов, забитых во всех футбольных матчах, сыгранных в k-м году новой эры (отсчет ведется по московскому времени), и взять последнюю цифру».

«Пятый знак дроби γ равен 1, если в записи $\sqrt{2}$ бесконечной десятичной дробью цифра 7 встречается бесконечное число раз, в противном случае он равен 3; все остальные знаки γ равны 2».

Я очень старался придумать абсурдные описания, которые тем не менее определяют единственную бесконечную дробь. Вряд ли мы согласимся принять их за «словесные портреты» дробей. И дело даже не в их абсурдности, важно то, что они не дают фактического описания этих дробей. Мы даже не исключили того, что описание может использовать уже утраченную информацию из прошлого (α), факты из будущего (δ). Кроме того, конечный текст может содержать требование проделать бесконечное число процедур для определения одного-единственного десятичного знака (γ). Все тот же К. Прутков предостерегал от таких ошибок: «Если бы все прошедшее было настоящим, а настоящее продолжало существовать наряду с будущим, кто был бы в состоянии разобраться: где причина и где последствия?»

Главная же неприятность, которая, собственно, и привела нас к противоречию, заключается в том, что «словесный портрет» мог использовать информацию о множестве всех «словесных портретов», в которую он сам должен входить в качестве одного из элементов.

То, что эта ситуация, носящая в логике название «порочного круга», является источником противоречий, известно со времени полулегендарного мудреца Эпименида, жившего в VI веке до н. э., который, будучи критянином (то есть живя на о. Крит), заявил: «Все критяне — лжецы». Будем для простоты делить всех людей на лжецов, всегда говорящих ложь, и правдивых, всегда говорящих правду, иначе можно погрязнуть в трудностях, связанных с аккуратным определением понятия «лжец». Приведенное высказывание не может быть правдой, так как тогда критянин Эпименид не мог говорить правды. Итак, оно является ложью, а значит, доказывает существование хотя бы одного правдивого критянина. Что же получилось? Из-за того, что один критянин (то, что он был мудрецом, сейчас не важно) изрек мысль, которая к тому же не могла быть правдой, делается вывод о существовании правдивого критянина. Можем ли мы быть действительно уверены в его существовании? Стоит ли после этого говорить, что речь не идет о возможности указать конкретного правдивого критянина?

Было бы еще хуже, если бы Эпименид (как иные утверждают) прямо заявил: «Я лжец» или «Я говорю сейчас ложь». Эти высказывания не могут быть ни правдой, ни ложью. И источник неприятностей здесь в том, что для решения вопроса об истинности высказывания нужно уже знать ответ на этот вопрос (порочный круг!).

Для того чтобы исключить возможность появления порочного круга в «словесных портретах», наложим дополнительное требование эффективности, то есть потребуем, чтобы «портрет» давал «возможность» явно построить дробь. Точнее, будем считать, что он должен содержать способ (или, как говорят, алгоритм), позволяющий нашему великану с неограниченной памятью, из которой он может пользоваться сколь угодно большими, но конечными частями, за конечные промежутки времени находить последовательные знаки дроби. Великана можно себе мыслить как математическую машину с неограниченной памятью, а описание дроби — конечной программой для вычисления ее последовательных знаков. Мы, разумеется, не дали строгого определения этого великана-машины, и важно, чтобы читатель уяснил себе это. А тогда я прошу его поверить, что такое определение можно дать (отложив это до другой статьи), и, используя интуитивные представления, принять участие в обсуждении некоторых общих принципов.

Теперь будем понимать под «объятной» дробью такую дробь, для вычисления знаков которой существует программа. Посмотрим, что изменилось. Поскольку программы можно издавать в виде книг, они содержатся в ультрауниверсальной библиотеке, а потому

1) *«необъятные» дроби существуют.*

Далее, хотя и наученные горьким опытом, мы не вправе отказаться от попыток научить великана выписывать конкретную «необъятную» дробь. Что же мешает этому? Вычислить номер книги в ультрауниверсальной библиотеке (а также по номеру написать книгу) нам было бы под силу, имей мы достаточную память и время, а значит, этому можно научить великана. *Теперь оставим лишь книги, содержащие программы для вычисления дробей.* Для нахождения k-го знака «необъятной» дроби β берем k-ю по счету программу, вводим ее в машину, ждем, пока она вычислит k-й знак, а затем подключаем программу замены знаков по таблице (это уже совсем легко). Что же, опять противоречие? Посмотрите внимательно, действительно ли мы построили программу? Вы, конечно, обнаружили слабое место: *нужно уметь по книге определять, является ли она программой для вычисления знаков бесконечной десятичной дроби.* А кто это должен делать? Этому надо научить машину. Давайте разберемся. Если бы существовала программа, позволяющая машине отвечать на этот вопрос, то мы бы действительно пришли к противоречию. Значит, такой программы существовать не может. Итак, получен замечательный факт:

2) *не существует конечно описываемого способа или программы (алгоритма) выяснить, является ли данный текст программой (алгоритмом) для вычисления последовательных знаков бесконечной десятичной дроби.*

Вдумайтесь в этот результат! В предположении, что существует корректное определение понятия алгоритма, без всякой дополнительной информации об этом определении, мы указали, как говорят, алгоритмически неразрешимую проблему. Есть много различных способов установить, что некоторые книги не содержат описаний алгоритмов для вычисления десятичных дробей (если, например, они содержат бессмысленный текст или в них речь идет о жизни на Марсе), но универсального рецепта устанавливать за конечное время, содержит ли книга описание такого алгоритма, не существует.

На этом мы закончим обсуждение возможного смысла слов, стоящих в заглавии статьи. Мы немного боимся, что после всего сказанного часть читателей начнет искоренять в своих занятиях математикой «рассмотрения» бесконечных множеств, доставляя неприятности себе и окружающим. Поэтому сделаем еще несколько замечаний, которые мы, к сожалению, не сможем здесь подкрепить аргументами (и ограничимся ссылками на авторитеты). Большинство математиков спокойно «рассматривает» бесконечные множества, вводя в своих рассуждениях небольшие ограничения, обеспечивающие, по их мнению, отсутствие противоречий. При этом, конечно, приходится «рассматривать» объекты, словесные описания которых человечество не смогло бы завершить до конца дней своих. Тем не менее выяснилось, что такого рода «рассмотрения» лежат в самой основе веками строившегося здания математики, от них зависит и его дальнейшая судьба. Хотя ряд математиков с большей или меньшей последовательностью пытался перестраивать математику, исходя из понятий, допускающих конечное описание, и на этом пути было получено много очень содержательных фактов, позволивших на многие вещи взглянуть по-иному, однако претензии на то, что в этих рамках и должно происходить развитие математики, широкой поддержки не получили. «Никто не может изгнать нас из рая, созданного для нас Кантором»,— сказал один из величайших математиков Давид Гильберт.

Помещаем одну из задач, предлагавшихся на 5-й традиционной олимпиаде по языковедению и математике (на первом туре в 1969 г.).

Задача.

Письмо 1.

Дорогой друг!

Некоторое время назад я купил двух очень красивых собак: овчарку и таксу, но быстро обнаружил, что они очень плохо воспитаны. Дело в том, что они очень любят лаять. В результате жить с ними в одном доме довольно трудно. Однако я не отчаиваюсь, ибо я установил путем практической проверки, что их поведение подчиняется определенным законам, непонятным, но непререкаемым (хотя, возможно, это объясняется тем, что раньше собаки выступали в цирке), и что я могу воздействовать на них, играя на рояле или зажигая настольную лампу.

В течение каждой минуты каждая собака либо лает, либо молчит: никаких переходов они не обнаруживают. Поведение же их в последующую минуту зависит только от событий предыдущей минуты, и эта зависимость такова.

Овчарка в последующую минуту ведет себя так же, как и в предыдущую: лает или молчит, если только в эту предыдущую минуту не было игры на рояле и такса не лаяла. В последнем случае овчарка меняет свое поведение на противоположное: лай на молчание и наоборот.

Что касается таксы, то если в предыдущую минуту настольная лампа горела, такса будет лаять или молчать в зависимости от того, лаяла или молчала овчарка, так что такса копирует овчарку с минутным запозданием. Если, однако, лампа не горела, такса будет делать противоположное тому, что делала овчарка.

Продолжение на стр. 25

Электрическое сопротивление — квантовое явление

Д. А. Франк-Каменецкий

Сопротивление проводника протеканию электрического тока — совсем не такая простая вещь, как это кажется на первый взгляд. Как мы увидим, и здесь не обойтись без кванта. Посмотрим сначала, что можно сделать без его помощи.

Классическая теория

Мы привыкли, что «классический» — слово похвальное. Говорят: Стрельцов забил «классический гол». Вместо «классический» можно было бы на более современном жаргоне сказать «классный» или даже «железный». Совсем иначе относится к этому слову физик. В современной физике классическими называются теории, созданные классиками науки прошлых веков, до возникновения квантовой физики и теории относительности. Чаще всего слово «классический» физики употребляют как противоположный слову «квантовый». Классическая теория отличается тем, что в ней не участвует квант. Такие теории очень просты, современному физику они кажутся несколько наивными. Они часто приносят большую пользу, но, как правило, решают вопрос не до конца. В классической теории для современного физика всегда чего-то не хватает.

Во многих книгах, в том числе и в учебниках (и даже очень хороших), пишется, что электрическое сопротивление металла происходит от столкновений электронов, переносящих ток, с атомами*) кристаллической решетки. Правильно ли такое понимание сопротивления?

Лучше всего не говорить ни «да», ни «нет», а сказать, что оно выражает классическую теорию электрического сопротивления. К ней относится все, что мы только что говорили о классических теориях вообще. Но в данном случае классическая теория оказывается совсем слабой: она не может объяснить многих самых основных особенностей электрического сопротивления. В классической теории безусловно верно одно: сопротивление происходит оттого, что электроны передают часть своей энергии и импульса (количества движения) кристаллической решетке. Но каким именно образом происходит эта передача — вопрос совсем не простой и очень интересный.

Температурная зависимость

Сопротивление чистых металлов сильно возрастает с температурой. Для многих из них оно примерно пропорционально абсолютной температуре. При низких температурах такая простая зависимость наруша-

*) Точнее было бы сказать — с ионами, но это здесь для нас несущественно. Механизм электрического сопротивления заключается в том, что электроны, ударяясь об атомы кристаллической решетки, заставляют их колебаться — электрическая энергия переходит в тепловую.

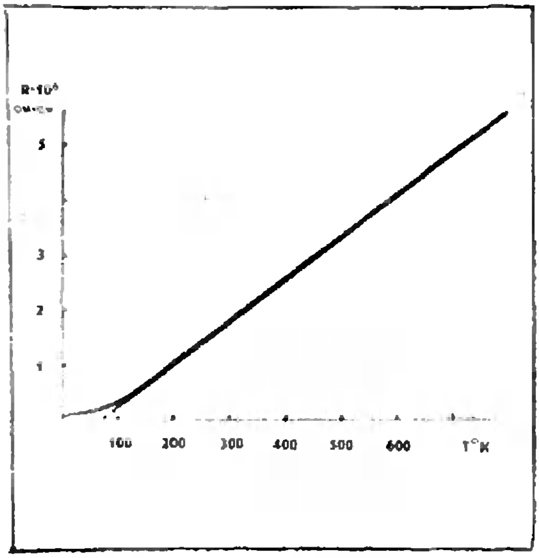


Рис. 1. График зависимости удельного сопротивления меди от абсолютной температуры.

ется. Это хорошо видно на рисунке 1, где показано, как меняется с температурой удельное сопротивление меди — самого употребительного проводника электрического тока. Как видно из рисунка, в области высоких температур зависимость хорошо представляется прямой линией. Но если эту прямую продолжить в сторону низких температур (на рисунке показано пунктиром), она уходит не в абсолютный нуль, а в несколько более высокую температуру — для меди около 60° К. На самом деле при низких температурах зависимость становится более сложной: сопротивление меняется пропорционально пятой степени температуры. При приближении к абсолютному нулю сопротивление чистых металлов становится очень малым. Есть группа металлов, у которых сопротивление совсем исчезает при температуре на несколько градусов выше абсолютного нуля. Этого явления, называемого сверхпроводимостью, мы сейчас касаться не будем. Достаточно много интересного можно сказать и о более простых вещах.

Если объяснять электрическое сопротивление столкновениями электронов с атомами, то температурная зависимость сопротивления чистых металлов остается совершенно непонятной. Ведь дело обстоит так, как если бы электроны сталкивались только с атомами, совершающими тепловое движение, но свободно пролетали мимо неподвижных. Иногда так и говорят (как будто электрону легче попасть в движущийся атом), но это ошибка. Это все равно что считать, будто, стреляя не целясь, легче попасть в качающийся маятник, чем в неподвижный. Итак, классическая теория не способна объяснить зависимость сопротивления от температуры.

Остаточное сопротивление

Когда измеряют сопротивление чистых металлов при очень низких температурах, то обнаруживается замечательная вещь. Продолжая кривую рисунка 1 к абсолютному нулю, получают сопротивление, которое должно было бы остаться, если бы можно было на опыте достичь абсолютного нуля. Его так и называют *остаточным сопротивлением*. Оказывается, что оно сильно меняется от образца к образцу. Остаточное сопротивление крайне чувствительно к ничтожным примесям, к механической и термической обработке. Тщательно очищая металл, обрабатывая его так, чтобы добиться безупречного кристаллического строения, можно уменьшить остаточное сопротивление, и нет предела этому уменьшению. Итак, опыт наталкивает на удивительный вывод: идеальный кристалл при температуре абсолютного нуля не должен иметь электрического сопротивления. Иными словами: электрическое сопротивление чистых металлов происходит только от нарушений кристаллического строения, которые вызываются тепловым движением, примесями и дефектами (неправильностями) кристаллической решетки.

Атомные коридоры

Если бы электроны двигались по законам классической механики, они должны были бы сталкиваться с атомами независимо от того, расположены ли атомы в строгом порядке или

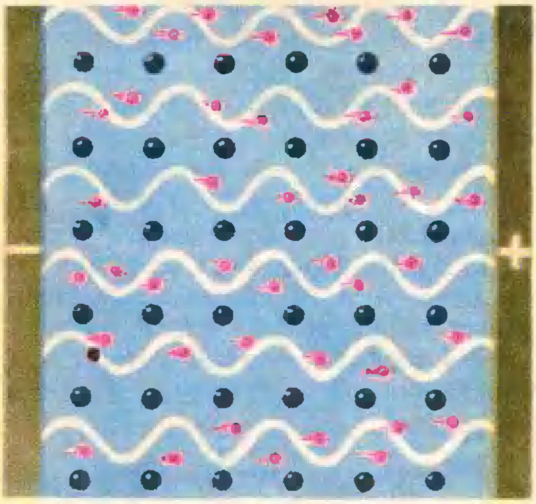


Рис. 2. Движение электронов и распространение электронных волн в правильном (идеальном) кристалле.

Рис. 3. Схема движения электронов по атомным лабиринтам в поликристаллическом агрегате. Красным цветом показаны электроны.

нет. Конечно, между правильными рядами атомов есть своего рода коридоры (рис. 2), но чтобы направить электрон по такому коридору, требовалась бы точная ориентировка кристалла по отношению к приложенному электрическому напряжению. А ведь обычно мы имеем дело не с одним кристаллом, а с сочетанием множества мелких кристалликов, ориентированных случайным образом. Одиночный правильный кристалл называют монокристаллом (от греческого слова «моно» — один), а сочетание многих кристаллов — поликристаллическим агрегатом (от греческого «поли» — много). Так вот, точные измерения показали, что сопротивление поликристаллических агрегатов очень мало отличается от сопротивления монокристаллов. Особенно важно то, что сопротивление поликристаллических агрегатов сильно уменьшается с понижением температуры. Это никак нельзя объяснить движением электронов по атомным коридорам по законам классической механики. При переходе из одного кристаллика в другой атомный коридор резко меняет свое направление (рис. 3). Электрон должен был бы с разлету стукнуться о «стенку». А он спокойно шествует по атомному лабиринту, подобно Тезею, которому указывала направление нить Ариадны. Что же это за чертовщина и как это объяснить?

Чудеса без чудес

Давно известны еще более удивительные факты. Механическая и термическая обработка заметно влияют на электрическое сопротивление металлов. Воспользуемся для удобства применяемой в технике единицей удельного сопротивления $ом \cdot мм^2/м = 10^{-4}$ $ом \cdot см = 10^{-6}$ $ом \cdot м$. В этих единицах удельное сопротивление обычной технической меди при 20° С выражается числом 0,0172. После холодной протяжки сопротивление медной проволоки возрастает до 0,0177. Даже наматывания проволоки на катушку достаточно, чтобы ее сопротивление возросло. Если же подвергнуть проволоку отжигу, то есть длительному нагреву, а затем охладить ее опять до 20° С, значение сопротивления возвращается к нормальной величине. Очевидно, сопротивление чувствительно к небольшим нарушениям кристаллической структуры (такие свойства называют структурно чувствительными). Еще поразительнее чувствительность сопротивления к ничтожным примесям. Тщательная очистка уменьшает удельное сопротивление меди при температуре 20° С до 0,0169 *ом·мм²/м*. Это обстоятельство имеет большое значение для техники. Ведь если уменьшить сопротивление проводов, то уменьшаются и бесполезные потери электроэнергии на их нагрев. Поэтому медь, предназначенную на электротехнические нужды, подвергают специальной очистке посредством электролиза. Этот своеобразный металлургический процесс несколько напоминает «переливание из пустого в порожнее». На аноде медь растворяется, а на катоде осаждается медь, чистота которой измеряется «тремя девятками» после запятой: 99,999%, то есть примеси в электролитической меди составляют всего тысячную долю процента. Такая тщательная очистка очень важна: после нее сопротивление, а с ним и тепловые потери заметно снижаются.

Посмотрим теперь, как количество примесей влияет на сопротивление меди. Достаточно добавить к меди 1% марганца, чтобы удельное сопротивление ее возросло до 0,048 *ом·мм²/м*, то есть почти в три раза! Между тем сопротивление чистого марганца составляет 0,05 *ом·мм²/м*. Таким образом, достаточно ввести в медь 1% марганца, чтобы ее сопротивление стало практически равно сопротивлению 100%-ного марганца! Это не исключительный случай. Примерно так же действуют добавки железа, кобальта, иридия и другие. Если бы сопротивление происходило от столкновений электронов с атомами примесей, эти примеси должны были бы влиять раз в сто слабее. С точки зрения классической теории непомерное действие малых примесей — чистое чудо.

У сплавов, содержащих примеси в большой пропорции, сопротивление очень велико. Металлурги разработали замечательные рецепты сплавов с высоким сопротивлением: никелин, манганин, константан, нихром и другие. Сопротивление этих сплавов в несколько раз больше, чем у каждой из составных частей. Так, константан, состоящий из 60% меди и 40% никеля, имеет удельное сопротивление 0,44 *ом·мм²/м*, в то время как у чистой меди оно равно 0,017, а у никеля 0,072 тех же единиц*).

«Королем» подобных сплавов можно назвать всем известный нихром, удельное сопротивление которого около 1 *ом·мм²/м*. Недаром он нашел такое широкое применение в нагревательных приборах. Есть разные рецепты нихрома. Простейший из них — 80% никеля и 20% хрома. Такой сплав имеет удельное сопротивление 1,05 *ом·мм²/м*, в то время как у чистого никеля оно 0,072 и у хрома 0,131. Этот сплав дорогой, но можно без ущерба заменить часть дорогого никеля дешевым железом. Одно время «рекорд» среди подобных сплавов держал мегарип из 65% железа, 30% хрома и 5% алюминия с удельным сопротивлением 1,4 *ом·мм²/м*.

Поразительно, что температурная зависимость сопротивления у сплавов совсем другая, чем у чистых металлов. Сопротивление большинства сплавов тоже возрастает с температурой, но гораздо слабее. Специально для научных приборов, где желательно иметь постоянное сопротивление, разработан уже упоминавшийся константан, название которого означает «постоянный». В интервале температур от 0° до 400° С его сопротивление меняется всего лишь от 0,441 до 0,448 *ом·мм²/м*.

С точки зрения классической теории постоянство сопротивления сплавов столь же мало понятно, как и пропорциональность сопротивления температуре для чистых металлов. Сопротивление сплава должно было бы по смыслу этой теории складываться из сопротивлений его составных частей по простому правилу смешения (как, например, теплоемкость). Если внимательно разобраться во всем, что известно об

---

*) Все цифры здесь приведены для температуры 20° С.

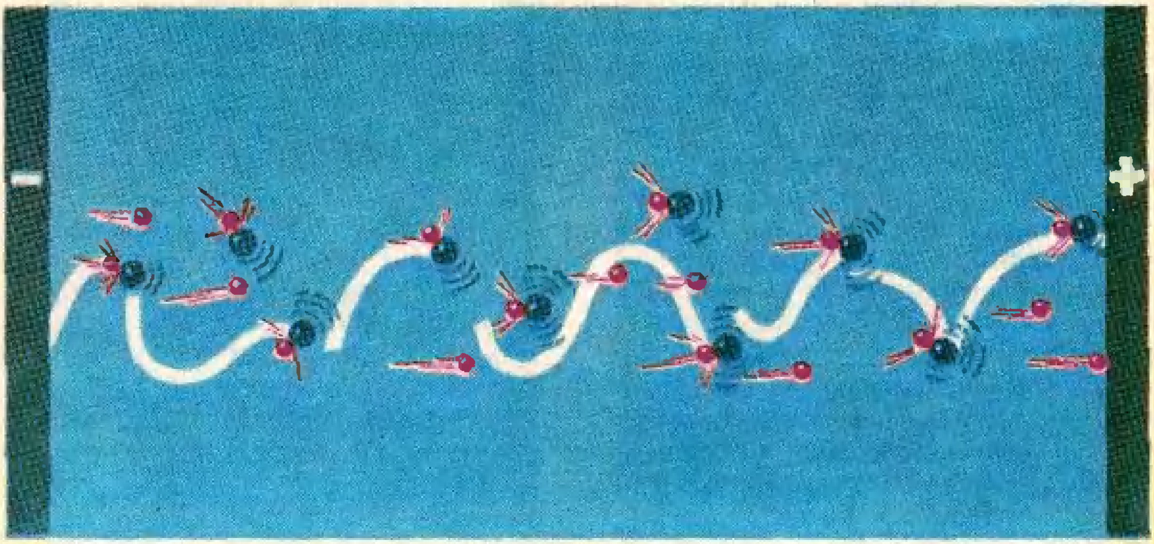


Рис. 4. Нарушение правильности атомного волновода тепловым движением.

электрическом сопротивлении, то станет ясно, что уже это простое явление вынуждает для своего понимания обратиться за помощью к кванту.

Электронные волны и атомные волноводы

Все становится на свое место, если вспомнить, что по законам квантовой механики электрон имеет одновременно свойства частицы и волны. Ширина атомных коридоров близка к длине волны электрона, и потому при движении по таким коридорам волновые свойства электрона проявляются в полной мере.

В радиотехнике сантиметровых волн широкое применение имеют волноводы. Это — металлические трубки круглого или прямоугольного сечения. Радиоволны распространяются по волноводу, следуя за всеми его изгибами. Свет — тоже электромагнитные волны, и его можно запрятать в световод — трубку с зеркальными стенками *). В последнее время охотно пользуются тончайшими световодами — стеклянными волокнами. Их можно как угодно изгибать — свет все равно будет послушно следовать вдоль волокна.

Действие световода с зеркальными стенками легко понять. Световые волны все время отражаются от стенок и, таким образом, остаются внутри световода. Радиоволны тоже хорошо отражаются от гладких металлических поверхностей. Если же поверхность шероховатая, то волна как бы разбивается о зазубрины и в результате рассеивается и поглощается. Ее энергия переходит в тепло.

В квантовой теории протекание электрического тока через металл описывается как распространение электронных волн по атомным коридорам, играющим роль волноводов. Если атомы расположены на плоскости в идеальном порядке, на равных расстояниях друг от друга, то такая плоскость полностью отражает электронные волны — наподобие идеального зеркала. Рассеяние и поглощение электронных волн происходит только при нарушении строгого порядка в расположении атомов. Этот удивительный вывод был получен впервые довольно сложным математическим путем из уравнений квантовой механики. Но его можно было бы сделать и на основании установленных опытным путем свойств электрического сопротивления, если бы к ним отнеслись более внимательно.

В идеальном правильном кристалле волноводы совершенно гладкие. Вся-

*) На практике нет необходимости делать стенки зеркальными. Обычно используют явление полного внутреннего отражения, но это для нашей темы не имеет значения.

Рис. 5. Первый тип дефектов кристаллической решетки — вакансии (пустые места). Замечательно, что электроны рассеиваются и на вакансиях — нужно ли лучшее доказательство того, что они сталкиваются вовсе не с атомами решетки? Дело в том, что вакансия играет роль отверстия в стенке атомного волновода, нарушающего правильное распространение электронных волн.

кое нарушение атомного порядка действует как шероховатость стенок волновода. Электронные волны рассеиваются нарушениями решетки. Часть энергии электронов поглощается и переходит в тепло. Это и есть квантовый механизм электрического сопротивления. Правильность атомных волноводов нарушается тепловыми колебаниями, на которых рассеиваются электронные волны (рис. 4). Отсюда возникает тепловая часть электрического сопротивления, зависящая от температуры. Охлаждая металл, ее можно сделать сколь угодно малой. При этом сохраняется остаточное или структурное сопротивление, связанное с постоянными дефектами (порчей) кристаллической структуры (рис. 5 и рис. 6). Дефекты есть во всяком кристалле и зависят от его «биографии» — от условий, в которых он зарождался, рос и существовал. Дополнительные дефекты возникают при холодной механической обработке — протяжке проволоки и даже намотке ее на катушку. Оттого и возрастает сопротивление. При длительном нагреве (отжиге) атомы возвращаются на свои места и дефекты залечиваются — сопротивление падает.

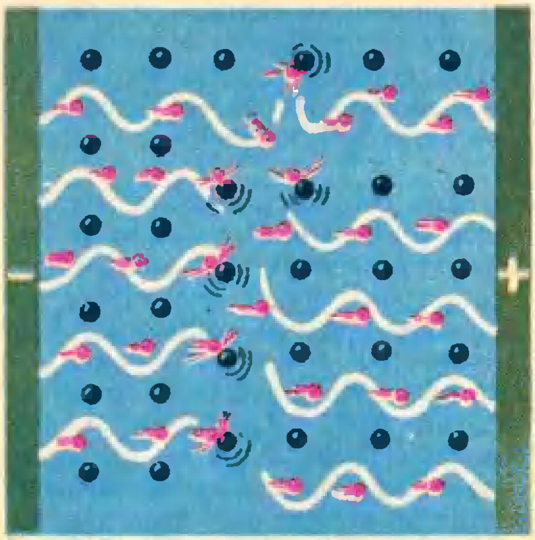
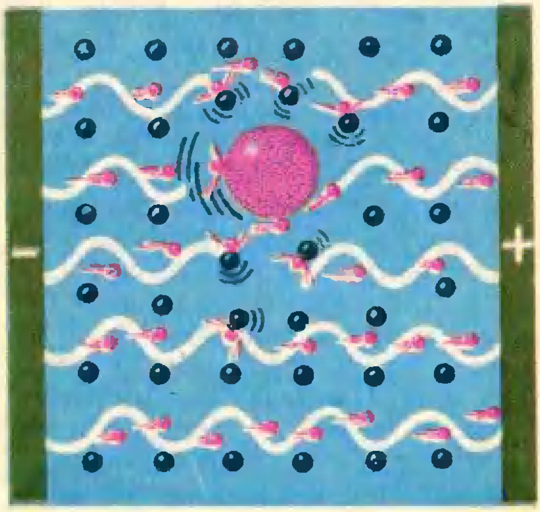


Рис. 6. Второй тип дефектов кристаллической решетки — дислокации.

Внедрение инородных атомов вызывает серьезную порчу кристаллической решетки (рис. 7). При этом один атом примеси может сбить с места сотни атомов кристалла-«хозяина». Оттого примеси и повышают сопротивление. Замечено, что дейст-

Рис. 7. Атом примеси сбивает с места множество атомов решетки. Из-за этого нарушается правильное движение не только тех электронов, которые сталкиваются с самим атомом примеси, но и множества других. (Соотношения расстояний между атомами кристалла и их размеров по отношению к атому примеси — условные.)



вне примеси тем сильнее, чем больше ее атомы по размерам и другим факторам отличаются от атомов «хозяина», чем сильнее они нарушают правильность кристаллической решетки.

Если охлаждать металл, то тепловая (то есть происходящая от теплового движения) часть сопротивления падает. Когда она станет гораздо меньше, чем не зависящая от температуры структурная часть, то при дальнейшем охлаждении сопротивление почти не меняется. У сплавов с неупорядоченным строением структурная часть сопротивления настолько велика, что даже при высоких температурах преобладает над тепловой. Этим и объясняется слабая зависимость электрического сопротивления сплавов от температуры.

Звуковой квант — фонон

Мы познакомились с некоторыми квантовыми явлениями, но сам квант пока оставался в тени. Сейчас он выйдет на передний план.

Тепловое движение в твердом теле можно представлять себе как колебания атомов около своих положений равновесия. Но частицы в твердом теле не могут колебаться независимо. Они все прочно связаны между собою и совершают всегда коллективные колебания. Не так, как на танцплощадке, где каждая пара движется независимо от других, а как в массовой сцене большого балета, где все исполняют свои партии согласованно.

Коллективные колебания громадного числа частиц вещества — это то же самое, что звуковые волны. Если вывести любую частицу из положения равновесия, то возмущение будет распространяться по телу со скоростью звука. Оказывается, что тепловое движение в твердом теле можно рассматривать как распространение звуковых волн. Нагревая тело, мы заставляем его звучать. К счастью для нас, частота этих колебаний в миллиарды раз выше тех, какие может услышать наше ухо. Очевидно, живые существа в процессе эволюции приспособились не слышать «тепловой звук», иначе мы не выдержали бы непрерывного шума «кричащих» предметов.

Итак, обнаруживается неожиданная связь между электрическим сопротивлением и звуком. Электроны рассеиваются на звуковых волнах, возбуждаемых при тепловом движении кристаллической решетки. Но всякая волна состоит из квантов. У световой или вообще электромагнитной волны — это фотоны, у звуковой волны — фононы (от греческих слов, означающих свет и звук). Фотоны — самые настоящие частицы, вполне равноправные с другими элементарными частицами. Фононы не совсем равноправны в том смысле, что они способны существовать только внутри вещества (в пустоте фононов быть не может). Они — и подобные им — называются квазичастицами (то есть «почти частицами»). Фонон — самый простой представитель обширной семьи квазичастиц. Другие ее члены нас сейчас не интересуют.

Мы говорили, что электронные волны рассеиваются на шероховатостях, созданных тепловым движением, то есть звуковыми волнами. Но если звуковую волну описывать как поток фононов, то и электроны можно считать частицами, забыв про их волновые свойства. Теперь мы как бы возвращаемся к простому объяснению сопротивления: электронам мешает свободно двигаться то, что они сталкиваются с другими частицами. Но только не с частицами вещества, а с звуковыми квантами — фононами.

Теперь можно, наконец, немного и посчитать. Будем для простоты вести расчет так, как если бы все фононы имели одну одинаковую частоту ν. Такое допущение неправильно, но ошибка от него получается небольшая. В свое оправдание мы можем сослаться на то, что великие физики Планк и Эйнштейн исходили из того же допущения в своей теории теплоемкостей твердых тел и получали не такие уж плохие результаты.

Энергия фонона, как и всякого кванта, равна $h\nu$, где h — постоянная Планка, а ν — частота волны. Число фононов есть $\frac{E}{h\nu}$, где E — энергия теплового движения, пропорциональная абсолютной температуре T. За множитель пропорциональности можно принять постоянную Больцмана k. Итак, число фононов *) равно $N = \frac{kT}{h\nu}$. Мы получили очень важный результат. Число фононов в твердом теле пропорционально абсолютной температуре. Следовательно, если сопротивление происходит от столкновений электронов с фононами, оно тоже должно быть пропорционально абсолютной температуре! Так разрешается одна из загадок электрического сопротивления.

Но этот результат справедлив только при достаточно высоких температурах. Ведь по смыслу квантовой теории число фононов не может быть меньше единицы. Посмотрим, при какой температуре оно равно единице. Эту температуру называют *температурой Дебая* и обозначают греческой буквой θ. Приравняв N единице, находим: $\theta = \frac{h\nu}{k}$. Температура Дебая (или *дебаевская температура*) играет очень важную роль в физике твердого тела. С помощью этой величины интересующее нас число фононов выражается совсем просто: $N = \frac{T}{\theta}$. При температуре ниже дебаевской это число становится меньше единицы. Это значит, что можно говорить только о среднем числе фононов, и расчет усложняется. Но величина $\frac{T}{\theta}$ по-прежнему остается мерой числа фононов в твердом теле, а следовательно, и числа столкновений электронов с фононами. Исходя из этих соображений, была высказана следующая гипотеза: температурная зависимость электрического сопротивления чистых металлов выражается универсальной функцией от меры числа фононов $\frac{T}{\theta}$. Математически эта гипотеза записывается так: $\frac{R}{R_0} = F\left(\frac{T}{\theta}\right)$, где R — сопротивление при температуре T, R_0 — при температуре θ, а F — функция, вид которой может быть найден из опыта. Важно то, что функция F — общая для разных чистых металлов. Как хорошо эта гипотеза оправдывается на опыте, видно из рисунка 8. Этот график построил в свое время американский физик Бардин, прославившийся впоследствии своими работами по теории сверхпроводимости.

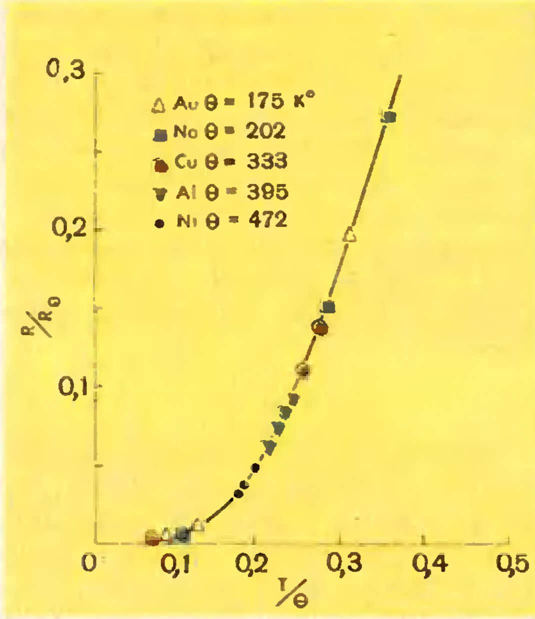


Рис. 8. Обобщенная кривая температурной зависимости удельного сопротивления чистых металлов.

Интересно и полезно связать дебаевскую температуру θ со скоростью звука c. Вспомним, что вещество состоит из атомов и волна распространяется не непрерывно, а перескакивает от атома к атому. За период колебания τ волна не может пройти путь, меньший, чем расстояние между соседними атомами a.

*) Это число фононов на одно колебание решетки, точнее говоря, на одну колебательную степень свободы, или, как любят выражаться физики, на один осциллятор.

Иначе волна «повисла бы» в пустоте между двумя атомами. Путь, проходимый звуковой волной за одно колебание, равен $c\tau$. Итак, атомное строение вещества накладывает на периоды звуковых колебаний ограничение: $c\tau \geqslant a$. Частота ν есть число периодов за единицу времени, откуда $\nu\tau = 1$. Таким образом, частоты звуковых колебаний ограничены условием:

$$\nu \leqslant \frac{c}{a}. \qquad (*)$$

При тепловом движении возбуждаются звуковые волны (иначе говоря, фононы) с разными частотами, как говорят, целый спектр частот. Но у спектра фононов есть предельная частота. Волны с более высокими частотами не успевали бы перескочить от одного атома к следующему и потому не могут возбуждаться. Подробные расчеты показывают, что дебаевскую температуру можно определять так, как мы это делали, если только за частоту ν брать предельную частоту фононного спектра в твердом теле. Так мы и будем поступать.

Нам осталось оценить расстояние между атомами a. Если число атомов в единице объема равно n, то $n = \frac{1}{a^3}$. Отсюда и из формулы (*) получается: $\frac{\nu^3}{c^3} \leqslant n$. Более точный расчет, который мы здесь привести не можем, дает добавочный множитель 4π. Таким образом, получается формула, связывающая предельную частоту ν со скоростью звука c:

$$4\pi \frac{\nu^3}{c^3} = n. \qquad (**)$$

Эта очень важная формула тесно связана с формулой Релея — Джинса, о которой говорилось в статье Я. А. Смородинского («Квант» № 1). Выражая частоту ν из формулы (**) и подставляя ее в выражение дебаевской температуры, получим, что

$$\theta = \frac{hc}{k}\sqrt[3]{\frac{n}{4\pi}}.$$

Итак, мы получили связь между дебаевской температурой θ и скоростью звука в твердом теле c. С помощью этой формулы и графика, представленного на рисунке 8, можно решать задачи, которые мы вам предложим. Они просты и не требуют особой смекалки, но интересны и поучительны в двух отношениях. Во-первых, вы убедитесь в существовании неожиданной связи между такими разными вещами, как скорость звука и зависимость электрического сопротивления от температуры. Во-вторых, вы познакомитесь с обобщенными кривыми, очень полезными во многих случаях, когда не удается воспользоваться формулами теории. Зависимости $R = f(T)$ у каждого металла свои, но раз их удалось совместить на обобщенной кривой (рис. 8), значит, эти зависимости и выражающие их кривые подобны. Подобие имеет здесь более широкий смысл, чем в школьной геометрии: оно означает, что кривые могут быть совмещены путем независимого изменения масштабов по двум осям координат. Вопросом о подобии физических зависимостей занимается специальная отрасль науки — теория подобия, о которой мы надеемся еще с вами поговорить в будущем.

А теперь попробуйте решить следующие задачи.

1. Скорость звука в железе равна 5200 *м/сек*, удельное сопротивление при минус 100° С равно 0,592 *ом·мм²/м*. Найдите удельное сопротивление железа при температуре +200° С.

2. Пользуясь зависимостью сопротивления меди от температуры (рис. 1), определите скорость звука в меди.

Внимание: в уравнении — параметр!

А. Я. Маргулис,
А. Г. Мордкович,
Б. А. Радунский

Вместо предисловия

Вспоминается такой случай. Ученику было предложено решить довольно безобидное на первый взгляд уравнение

$$(a^2-5a+6)x = a^2-4. \qquad (1)$$

Недолго думая, ученик проделал следующие выкладки:

$$x = \frac{a^2-4}{a^2-5a+6} = \frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)(a-3)};$$

$$x = \frac{a+2}{a-3}. \qquad (2)$$

Он явно не учел, что в заданном уравнении содержится параметр a и что уравнение с параметром — это, по существу, множество уравнений. Вот и наше уравнение при $a=0$ принимает вид $6x=-4$, при $a=1$ принимает вид $2x=-3$ и т. д. Иными словами, дав параметру конкретное числовое значение, мы из множества уравнений выделяем одно — соответствующее выбранному значению параметра. Но тогда и решения зависят от параметра.

Мы уже говорили, что при $a=0$ уравнение (1) принимает вид $6x=-4$. Корнем этого уравнения является значение $x=-\frac{2}{3}$. Но и по формуле (2) при $a=0$ получается $x=-\frac{2}{3}$. При $a=1$ уравнение (1) принимает вид $2x=-3$, откуда $x=-\frac{3}{2}$. Но и по формуле (2) при $a=1$ получается $x=-\frac{3}{2}$.

Если бы такое положение имело место *для любого* действительного значения a, то можно было бы утверждать, что формулой (2) определяется решение уравнения (1). Но это не так.

Положим $a=2$. Уравнение (1) принимает вид $0\cdot x=0$. Корнем этого уравнения служит любое действительное число, тогда как формула (2) дает в этом случае $x=-4$.

При $a=3$ уравнение (1) принимает вид $0\cdot x=5$. Это уравнение не имеет решений. Впрочем, и выражение $\frac{a+2}{a-3}$ не имеет смысла при $a=3$.

Таким образом, *утверждать, что* $x=\frac{a+2}{a-3}$ *при любом значении параметра, нельзя.*

На самом деле рассуждать надо было следующим образом. Прежде чем делить обе части уравнения (1) на коэффициент при неизвестном, посмотрим, не может ли случиться так, что при некоторых значениях параметра этот коэффициент обратится в нуль. Замечаем, что трехчлен a^2-5a+6 обращается в нуль при $a=2$, $a=3$. Значит, нужно отдельно рассмотреть эти случаи, что мы уже сделали. Если же $a\neq 2$, $a\neq 3$, то можно обе части уравнения разделить на коэффициент при x, получим $x=\frac{a+2}{a-3}$. Объединяя полученные результаты, запишем

Ответ: если $a=2$, то x — любое действительное число;

если $a=3$, то решений нет;

если $a\neq 2$, $a\neq 3$, то $x=\frac{a+2}{a-3}$.

Этот простой пример показывает, что при решении уравнений с па-

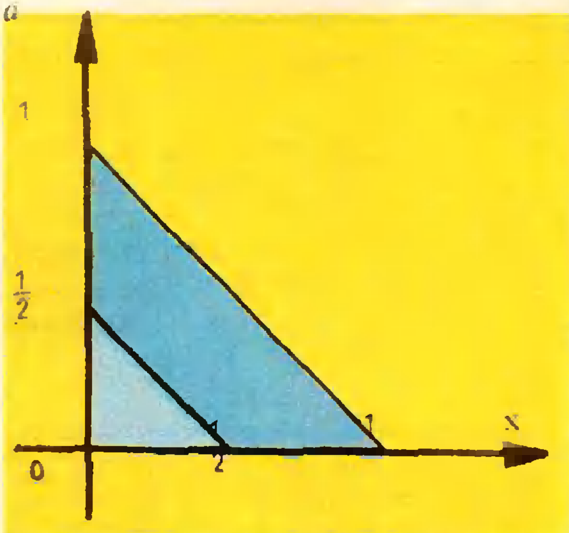


Рис. 1.

раметрами особое значение имеет рассмотрение всех возможных случаев. При этом заранее трудно предсказать, какие случаи выявятся в процессе решения. Это, с одной стороны, затрудняет решение, но, с другой стороны, делает работу более интересной, придавая ей исследовательский характер.

Немного теории

Общий вид уравнения с одним параметром таков:

$$F(x,a)=0. \qquad (3)$$

При различных a уравнение (3) может иметь различные множества корней, и наша задача состоит в том, чтобы изучить все случаи, выяснить, что будет при любом значении параметра. При решении уравнений с параметром обычно приходится рассматривать много различных вариантов. Своевременное обнаружение хотя бы части невозможных вариантов имеет большое значение, так как освобождает нас от лишней работы. Поэтому при решении уравнения (3) целесообразно под ОДЗ понимать область допустимых значений неизвестного и параметра, то есть множество всех пар чисел (x, a), при которых определена (имеет смысл) функция двух переменных $F(x, a)$. Отсюда естественная геометрическая иллюстрация ОДЗ в виде некоторой области плоскости xOa.

Например, ОДЗ уравнения

$$\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{1-(x+a)} \qquad (4)$$

определяется системой неравенств

$$x\geqslant 0,\ a\geqslant 0,\ x+a\leqslant 1.$$

Этой системе удовлетворяют координаты всех точек треугольника (включая и его границу), окрашенного на рисунке 1 в голубой и синий цвета *). Из этих рассуждений, кстати, сразу следует, что при $a<0$ уравнение (4) не имеет решений.

Решим уравнение (4). После возведения обеих его частей в квадрат (что является в данном случае равносильным преобразованием в силу неотрицательности обеих частей уравнения (4)) получим уравнение

$$2\sqrt{ax}=1-2(x+a). \qquad (5)$$

Выше мы уже говорили о том, что отбрасывание хотя бы части невозможных вариантов освобождает нас от лишней работы. Замечаем, что левая часть уравнения (5) неотрицательна при всех допустимых a,x, значит, там, где правая часть этого уравнения отрицательна, искать решения бесполезно. Ясно, что искать решения следует в той части ОДЗ, где они могут быть, произведя для этого соответствующее сужение ОДЗ:

$$1-2(x+a)\geqslant 0,\ \text{откуда}\quad x+a\leqslant\frac{1}{2}.$$

На рисунке 1 закрашена синим цветом та часть ОДЗ, где решений быть не может.

Возведя в квадрат обе части уравнения (5) **) и приведя подобные члены, получим уравнение

$$x^2+(a-1)x+a^2-a+\frac{1}{4}=0,$$

*) Подробнее о геометрическом решении систем неравенств с двумя неизвестными см. «Квант» № 4 за 1970 год.

**) В новой ОДЗ обе части уравнения (5) неотрицательны. Возведение в квадрат в таком случае не приведет к появлению посторонних корней.

откуда

$$x_{1,2}=\frac{1-a\pm\sqrt{2a-3a^2}}{2}.$$

Оба найденных корня при всех допустимых значениях параметра a, (то есть при всех a, удовлетворяющих неравенствам $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$, — см. рисунок 1) являются действительными числами. В самом деле, дискриминант $D=2a-3a^2\geqslant0$ при $0\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$; значит, тем более $D\geqslant0$ при $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.

Теперь нам нужно выяснить, удовлетворяют ли найденные значения условиям $x\geqslant0$, $x+a\leqslant\frac{1}{2}$.

Проверим сначала выполнение условия $x+a\leqslant\frac{1}{2}$. Имеем

$$x_1+a=\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}+a=$$
$$=\frac{1+a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}.$$

Решив неравенство

$$\frac{1+a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}\leqslant\frac{1}{2},$$

получим $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$. Значит, $x_1+a\leqslant\frac{1}{2}$ при всех допустимых значениях параметра a.

Далее,

$$x_2+a=\frac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}+a=$$
$$=\frac{1+a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}.$$

Неравенство

$$\frac{1+a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}\leqslant\frac{1}{2}$$

выполняется только при $a=0$. Но при $a=0$ имеем $D=0$ и $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

Доказательство неотрицательности обоих найденных корней предоставляем провести читателю.

Ответ: если $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$,

то $x=\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$;

если $a<0$ или $a>\frac{1}{2}$, то решений нет.

Заметим, что при решении рассмотренного уравнения сужение ОДЗ оказалось весьма полезным. Естественно возникает вопрос: когда надо проводить такие уточнения?

Если мы выполняем преобразование, в результате которого получается уравнение, равносильное предыдущему, то в сужении ОДЗ надобности, конечно, нет. В противном случае оно полезно. Такая ситуация возникает, например, при возведении в квадрат (или в любую четную степень) обеих частей того или иного уравнения, с чем мы и встретились в рассмотренном примере.

Несколько примеров

Пример 1*). Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x}.$$

Решение. ОДЗ определяется условиями $x>0$, $a+x\geqslant0$, $a\neq0$ (отсюда, кстати, сразу следует, что при $a=0$ уравнение не имеет решений). Преобразуем уравнение к виду

$$(a+x)^{3/2}=ax^{3/2}.$$

Сужаем ОДЗ: из неотрицательности левой части последнего уравнения и условий $x>0$, $a\neq0$ следует, что $a>0$.

Далее получаем: $a+x=a^{2/3}x$, откуда $x\,(a^{2/3}-1)=a$.

При $a=1$ решений, очевидно, нет. Если $a\neq1$, то

$$x=\frac{a}{a^{2/3}-1}.$$

Выясним, при всех ли рассматрива-

*) № 206 из «Сборника задач по элементарной математике». Авторы — Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, В. В. Никитин, А. И. Санкин. В указанном задачнике пример решен неверно.

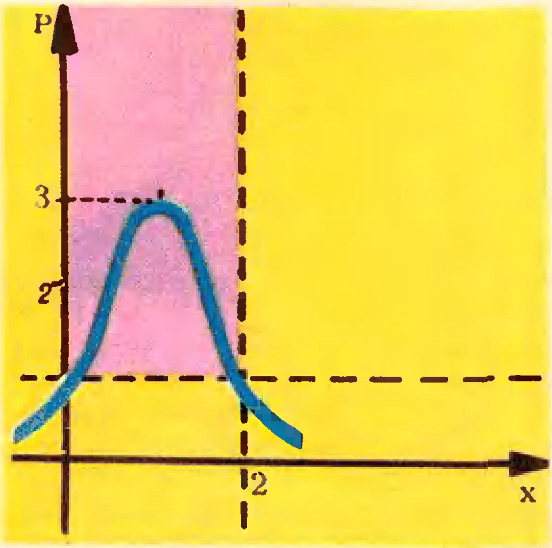


Рис. 2.

емых значениях параметра a ($a>0$, $a\neq 1$) выполняется условие $x>0$ (из которого с очевидностью следует и выполнение второго условия $a+x\geq 0$). Неравенство $\frac{a}{a^{2/3}-1}>0$ выполняется только при $a>1$ (с учетом того, что $a>0$). Таким образом, не при всех допустимых значениях a найденный корень оказался пригодным.

Ответ: если $a>1$, то $x=\frac{a}{a^{2/3}-1}$; если $a\leq 1$, то решений нет.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_9 x+\log_9\frac{2-x}{2}=\log_9\log_9 p.$$

Решение. ОДЗ определяется неравенствами $0<x<2$, $p>1$ (на рисунке 2 эта область окрашена в малиновый цвет). Решая уравнение, последовательно получим

$$\frac{x(2-x)}{2}=\log_9 p, \qquad (6)$$

$$x^2-2x+2\log_9 p=0,$$

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2\log_9 p}.$$

Условие $1-2\log_9 p\geq 0$ выполняется при $p\leq 3$, что с учетом ОДЗ дает $1<p\leq 3$. При таких p корни будут действительными числами. При $p>1$ выполняется неравенство $\log_9 p>0$, а потому $1-2\log_9 p<1$. Отсюда следует, что при $1<p\leq 3$ имеют место неравенства $0<x_{1,2}<2$.

Ответ: если $1<p\leq 3$, то $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2\log_9 p}$; при остальных p решений нет.

Замечание. Из уравнения (6) получаем $p=9^{\frac{x(2-x)}{2}}$. График этой функции, построенный на рисунке 2, наглядно показывает, что условие $0<x<2$ выполняется при $1<p\leq 3$.

Пример. 3. Решить уравнение

$$\frac{a+\sin x}{a\cos x+1}=\frac{a+\cos x}{a\sin x+1}.$$

Решение. Рассмотрим сначала случай $a=0$. Заданное уравнение принимает вид $\sin x=\cos x$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$ ($n=0,\pm 1,\ldots$).

Пусть теперь $a\neq 0$. Тогда ОДЗ определяется условиями

$$\cos x\neq -\frac{1}{a};\quad \sin x\neq -\frac{1}{a}.$$

Преобразуем заданное уравнение к виду

$(\sin x-\cos x)[a^2+a(\sin x+\cos x)+1]=0$.

Последнее уравнение сводится к следующей совокупности уравнений:

$$a^2+a(\sin x+\cos x)+1=0, \qquad (7)$$
$$\sin x-\cos x=0.$$

Решая первое уравнение совокупности (7), получаем:

$$a\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-a^2-1$$

и далее

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{a^2+1}{a\sqrt{2}}.$$

Последнее уравнение не имеет решений, так как $\left|-\frac{a^2+1}{a\sqrt{2}}\right|>1$ при любом $a\neq 0$. В самом деле, предположим, что $\frac{a^2+1}{|a|\sqrt{2}}\leq 1$; преобразуя это неравенство, получаем

$$a^2+1\leq |a|\sqrt{2},\ (a^2+1)^2\leq 2a^2,$$
$$a^4+1\leq 0.$$

Последнее неравенство неверно.

Решениями второго уравнения совокупности (7) являются значения $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Остается проверить, при всех ли значениях $a\neq 0$ найденные значения x являются допустимыми.

Если $k=2n$, то $\sin x=\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и должно выполняться условие $\frac{\sqrt{2}}{2}\neq -\frac{1}{a}$, то есть $a\neq -\sqrt{2}$.

Если $k=2n+1$, то $\sin x=\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из условия $-\frac{\sqrt{2}}{2}\neq -\frac{1}{a}$

получаем: $a\neq\sqrt{2}$.

Объединяя все результаты, запишем

Ответ: если $a\neq\pm\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$;

если $a=\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$;

если $a=-\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi(2n+1)$ $(k, n=0, \pm 1, \pm 2; \ldots)$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\log^2_{\sqrt{2}}\cos x-2a\log_{\sqrt{2}}\cos x=a^2-8. \tag{8}$$

Решение. Положив $y=\log_{\sqrt{2}}\cos x$, преобразуем заданное уравнение в квадратное уравнение

$$y^2-2ay-(a^2-8)=0,$$

откуда $y_{1,2}=a\pm\sqrt{2(a^2-4)}$.

Теперь нужно решить совокупность логарифмических уравнений

$$\log_{\sqrt{2}}\cos x=a+\sqrt{2(a^2-4)}, \tag{9}$$

$$\log_{\sqrt{2}}\cos x=a-\sqrt{2(a^2-4)}. \tag{10}$$

Замечаем, что при $a^2-4<0$ правые части уравнений (9) и (10) не имеют смысла. Это значит, что, при $-2<a<2$, оба уравнения не имеют решений. Рассмотрим случай $a^2-4\geqslant 0$, что возможно при $a\geqslant 2$ или при $a\leqslant -2$.

Пусть для начала $a\geqslant 2$. Так как $\cos x\leqslant 1$, а $\sqrt{2}>1$, то $\log_{\sqrt{2}}\cos x\leqslant 0$. Значит, уравнения (9) и (10) будут иметь решения только при таких значениях параметра a, при которых правые части уравнений неположительны. Нетрудно видеть, что при $a\geqslant 2$ правая часть уравнения (9) положительна, следовательно, уравнение (9) не имеет решений.

Выясним, при каких значениях параметра a будет неположительной правая часть уравнения (10). Решив неравенство $a-\sqrt{2(a^2-4)}\leqslant 0$ (с учетом условия $a\geqslant 2$), получаем $a\geqslant\sqrt{8}$. Таким образом, если $2\leqslant a<\sqrt{8}$, то уравнение (10) не имеет решений (а поскольку не имеет решений и уравнение (9), то заключаем отсюда, что и уравнение (8) в указанном случае не имеет решений). Если $a\geqslant\sqrt{8}$, то из уравнения (10) получаем

$$x=\pm\arccos(\sqrt{2})^{a-\sqrt{2a^2-8}}+2\pi n. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь случай $a\leqslant -2$. При этих значениях параметра правая часть уравнения (10) отрицательна, то есть это уравнение имеет решения (выше они уже записаны формулой (11)). Выясним, при каких значениях параметра a будет неположительной правая часть уравнения (9). Решив неравенство $a+\sqrt{2(a^2-4)}\leqslant 0$ (с учетом условия $a\leqslant -2$), получаем $a\geqslant -\sqrt{8}$. Таким образом, если $a<-\sqrt{8}$, то уравнение (9) не имеет решений, если же $-\sqrt{8}\leqslant a\leqslant -2$, то уравнение (9) имеет решения, а именно:

$$x=\pm\arccos(\sqrt{2})^{a+\sqrt{2a^2-8}}+2\pi n.$$

Объединяя все полученные результаты, запишем

Ответ: если $-2<a<\sqrt{8}$, то решений нет;

если $a\geqslant\sqrt{8}$ или $a<-\sqrt{8}$, то

$$x=\pm\arccos(\sqrt{2})^{a-\sqrt{2a^2-8}}+2\pi n;$$

если $-\sqrt{8}\leqslant a\leqslant -2$, то

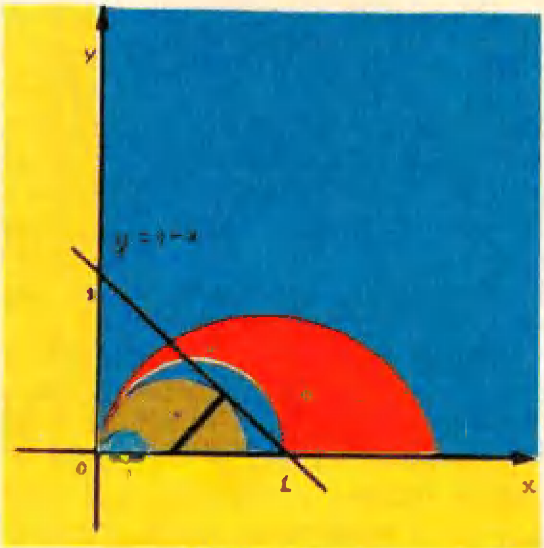


Рис. 3.

$$x = \pm \arccos (\sqrt{2})^{a \pm \sqrt{2a^2 - 8}} + 2\pi n.$$

Геометрия помогает алгебре

При решении уравнений с параметром могут оказаться весьма полезными различные геометрические соображения. Рассмотрим для примера уравнение

$$\sqrt{x(2a-x)} = 1 - x \quad \text{при} \quad a > 0.$$

Каждое решение уравнения можно интерпретировать как абсциссу точки пересечения прямой $y = 1 - x$ с полуокружностью

$$y = \sqrt{x(2a-x)}, \text{ или}$$

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2; \ y \geqslant 0$$

радиуса a, с центром в точке $(a, 0)$ (рис. 3). Положение полуокружности и ее радиус меняются при изменении параметра a. На рисунке 3 наглядно видно, что при одних значениях a полуокружность не пересекает прямую $y = 1 - x$ (полуокружности, лежащие под прямой), при других значениях a полуокружность пересекает прямую в двух точках (полуокружности, лежащие в средней голубой зоне), при третьих значениях a полуокружность пересекает прямую в одной точке (полуокружности, лежащие в красной зоне или выше), а при некотором значении a полуокружность касается прямой (полуокружность, разделяющая голубую и коричневую зоны).

Рассмотрим случай, когда полуокружность касается прямой $y = 1 - x$. Из геометрических соображений заключаем, что расстояние центра этой полуокружности от точки пересечения прямой $y = 1 - x$ с осью абсцисс равно $a\sqrt{2}$. Отсюда $a + a\sqrt{2} = 1$, то есть случай касания имеет место при $a = \sqrt{2} - 1$. Значит, при $a < \sqrt{2} - 1$ уравнение не имеет решений (голубая зона), а при $a = \sqrt{2} - 1$ имеет единственное решение, которое тоже находится из геометрических соображений: $x = a + \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 3), откуда получаем $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Полуокружность, проходящая на рисунке 3 через точку $(1, 0)$, соответствует значению параметра $a = \frac{1}{2}$. Значит, при $\sqrt{2} - 1 < a \leqslant \frac{1}{2}$ уравнение имеет два решения:

$$x_1 = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a - 1}}{2},$$

$$x_2 = \frac{a + 1 + \sqrt{a^2 + 2a - 1}}{2}$$

(корни найдены с помощью обычного алгебраического решения заданного уравнения). Наконец, если $a \geqslant \frac{1}{2}$, то уравнение имеет единственное решение $x = x_1$ (поскольку $x_1 < x_2$).

Ответ: если $a < \sqrt{2} - 1$, то решений нет;

если $a = \sqrt{2} - 1$, то $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

если $\sqrt{2} - 1 < a \leqslant \frac{1}{2}$,

то $x_{1,2} = \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a - 1}}{2}$.

если

$a > \frac{1}{2}$, то $x = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a - 1}}{2}$.

Попробуйте сами решить предложенное уравнение алгебраически с соответствующими исследованиями, и вы убедитесь, что геометрические рассуждения в данном случае и нагляднее, и красивее.

ЗАДАЧИ

Мы рассмотрели ряд примеров решения уравнений с одним параметром. Одним из вас они понравились больше, другим — меньше, но несомненно одно: если вы тщательно разобрали эти примеры с карандашом в руках (как советовала редакционная коллегия нашего журнала в № 1), то вы уже получили определенную пользу. Хотите в этом убедиться? Решите сами следующие уравнения с параметром a:

1. $a^2 - \frac{a^2 - 1}{2x - x^2} = \frac{x + 2}{x - 2}$.
2. $\sqrt{x + a} = a - \sqrt{x}$.
3. $\sqrt{x - 2a} - \sqrt{x - a} = 2$.
4. $x + \sqrt{x^2 - x} = a$.
5. $\sin(a + x) + \sin x = \cos\frac{a}{2}$.
6. $\sin^2 x + 4\sin x + a = 0$.
7. $\sin x + 2\cos ax = 3$.
8. $\log_{\sqrt{x}} a \log_{a^2} \frac{a^2 - 4}{2a - x} = 1$.
9. $\frac{\log_x (2a - x)}{\log_x 2} + \frac{\log_a \sqrt{x}}{\log_a 2} = \frac{1}{\log_{a^2 - 1} 2}$.
10. $\log^2_{\frac{1}{2}} (2\sin x) + a\log_{\frac{1}{2}} \sin x + 3 = 0$.

Начало на стр. 9

Прошу Вас сообщить мне, какие действия с роялем и лампой должен я совершить, чтобы установить и поддержать тишину в доме.

Искренне Ваш.........

Письмо 2 (ответное).

Дорогой друг!

Я был крайне встревожен Вашим письмом, но быстро успокоился, поняв, что Ваше тяжелое положение можно исправить. Если в ту минуту, когда Вы будете читать это письмо, Вы не будете играть на рояле, а лампа будет гореть, в то время как овчарка и такса будут лаять, то поступите следую-

Задание. Восстановите содержание второго листка письма, если известно, что там для любой ситуации, возможной в минуту чтения письма, давались инструкции по установлению и поддержанию тишины в доме.

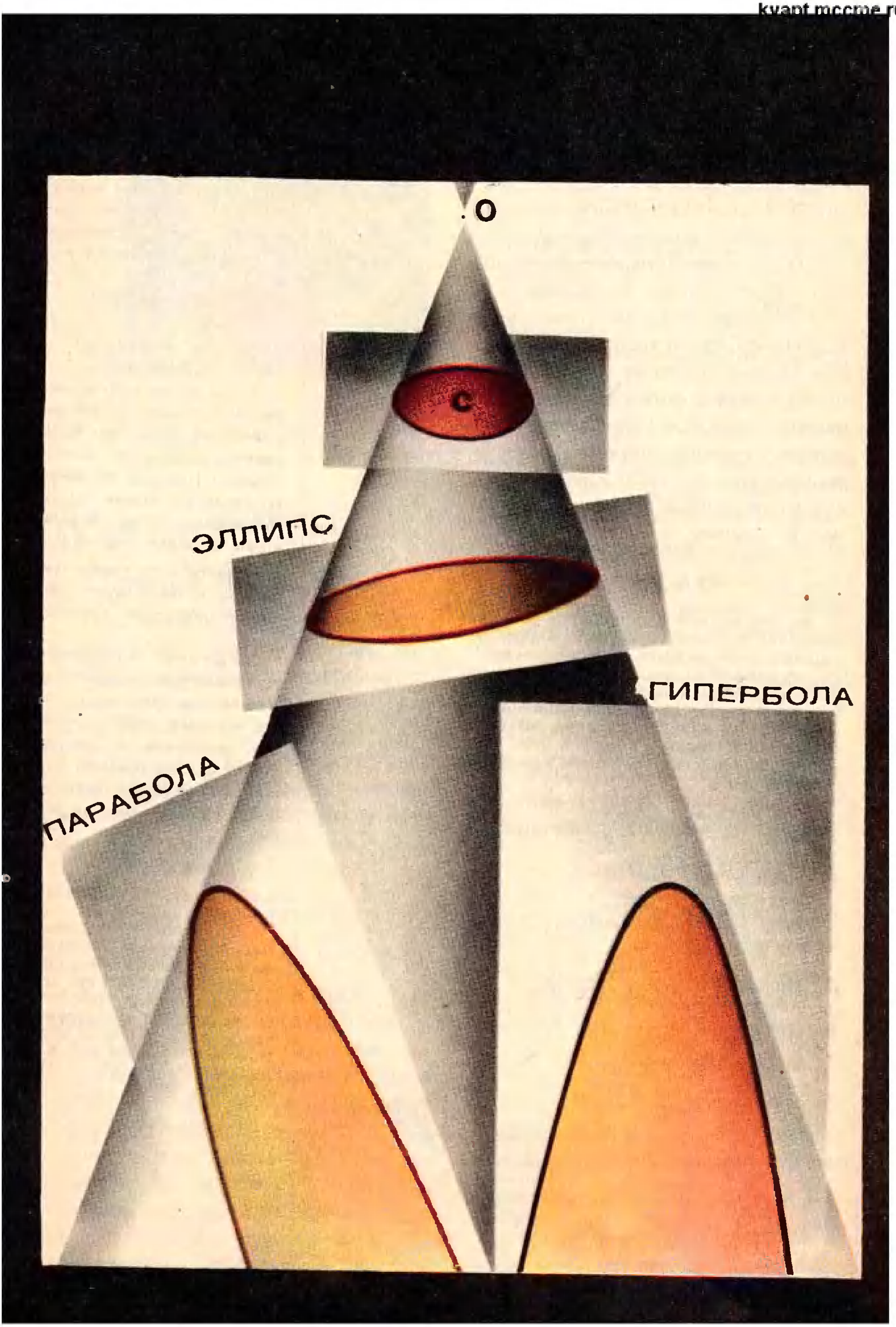
ПОПРАВКИ:

в № 6 на стр. 39 перевернут рисунок 1;

на стр. 59 (ответ к примеру 4) деление не доведено до конца. Ответ должен выглядеть так: 1022634; при делении в первом столбце этого же примера необходимо сдвинуть все остатки вправо.

В № 5 стр. 62 в варианте 4 задача 2 должна быть еще одна серия

$$x = \pi n \pm \arcsin\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$$


O
C
ЭЛЛИПС
ГИПЕРБОЛА
ПАРАБОЛА

ЭЛЛИПС

И. Н. Бронштейн

Даны: точка О и окружность С, лежащая в плоскости, не проходящей через О.

Пусть прямая линия, бесконечная в обе стороны (как и полагается в геометрии), движется так, что она все время проходит через О и через одну из точек окружности С.

При этом движении прямая описывает поверхность, состоящую из двух раструбов (полостей).

Это — коническая поверхность. *).

Если ее пересекать различными плоскостями, тоже не проходящими через точку О, то в сечении получаются кривые линии, называемые коническими сечениями.

Их три типа:

эллипс, гипербола и парабола.

Они были известны еще в Древней Греции. Их открыл некий Менехм около 360 года до нашей эры, а до нас они дошли по замечательному сочинению выдающегося математика Аполлония, написанному примерно 200 лет спустя.

О первой из этих кривых и рассказывается здесь.

*) Слева изображена только одна полость конической поверхности.

Вступление

Эту фигуру знают все. С ней встречаются в начальной астрономии и географии (траектории движения планет и спутников, форма земного меридиана, путь электрона вокруг ядра атома), в черчении, рисовании и стереометрии (рисунки технических деталей, круглых предметов и геометрических тел), но что такое эллипс, чем он интересен — а это действительно замечательная фигура, обладающая красивыми и важными свойствами,— об этом в школьных учебниках ничего не говорится.

На вопрос «что такое эллипс?» одни ответят: «вытянутый круг» или «вытянутая окружность» *), другие — «сжатый круг (окружность)», третьи — «кривая овальной формы», четвертые ничего не ответят, а просто сделают более или менее удачный рисунок; в каждом из этих ответов есть доля истины, но они требуют еще уточнений.

Достаточно ли, например, сказать, что эллипс — кривая оваль-

*) *Окружность* — линия, а *круг* — часть плоскости внутри нее. Для эллипса аналогичных д в у х слов нет: как сама кривая, так и часть плоскости внутри нее называется одинаково, говорят: «длина эллипса», «площадь эллипса». Читатель в каждом случае без труда установит, о каком смысле слова «эллипс» идет речь.

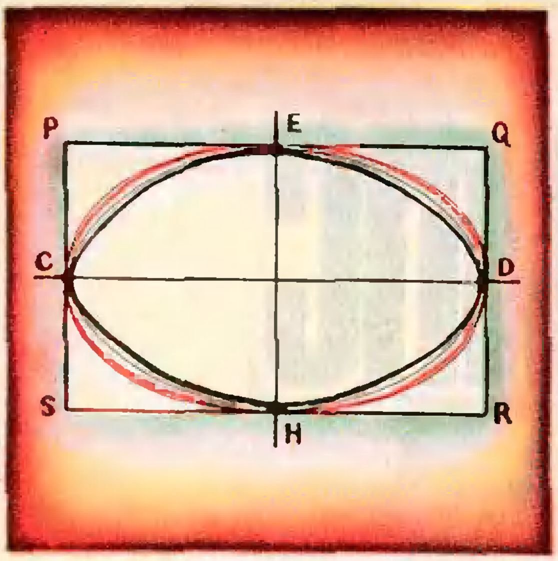


Рис. 1. Только красный овал — эллипс.

ной формы? Под этими словами обычно понимают линию, обладающую двумя осями симметрии CD и EH, вписанную в прямоугольник $PQRS$ и похожую на окружность (рис. 1). Тот же смысл вкладывается в слова «сжатая» или «вытянутая окружность». Но в прямоугольник можно вписать много такого рода кривых — некоторые из них изображены на рисунке 1. Только одна из них — красная — имеет право называться эллипсом. Чем же она выделяется из остальных кривых?

Их тоже можно получить сжатием (или растяжением) окружности, но это сжатие не будет равномерным. Чтобы разобраться в этом, познакомимся сначала с геометрическим преобразованием плоскости — *равномерной осевой деформацией* или, кратко, *деформацией*.

Деформация *)

Возьмем в заданной плоскости Π некоторую прямую l и зададим положительное число k. Будем называть деформацией плоскости Π относительно оси l с коэффициентом k такое преобразование плоскости в себя, при котором каждая ее точка m переходит в точку M по правилам:

1) обе точки m и M лежат на одном перпендикуляре к оси l по одну сторону от нее; точки, лежащие на самой оси, остаются неподвижными;

2) расстояние точки от оси умножается на k, то есть $m_0M = k\cdot m_0m$, где m_0 — основание перпендикуляра из точки m на ось l (рис. 2, *а*, *б*).

Если $k>1$, то все точки плоскости (кроме точек на самой оси) удаляются от оси — плоскость растягивается, а если $k<1$, то приближаются к оси —

*) Это слово (от латинского «deformatio» — изменение формы) применено здесь вместо выражения «растяжение или сжатие».

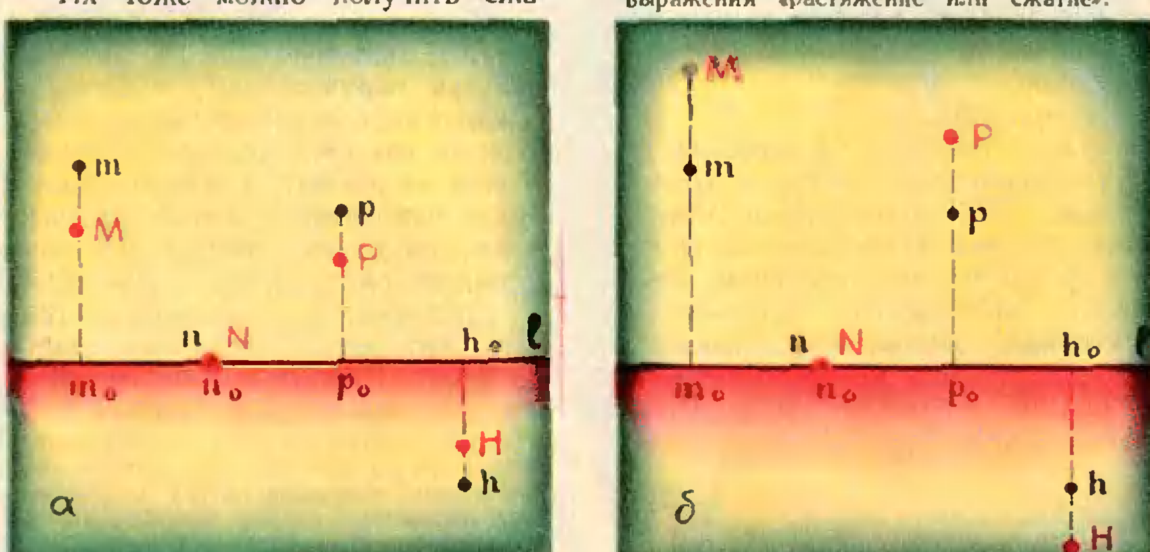


Рис. 2. Деформации с коэффициентами *а*) $k=\frac{2}{3}$ *б*) $k=\frac{3}{2}$.

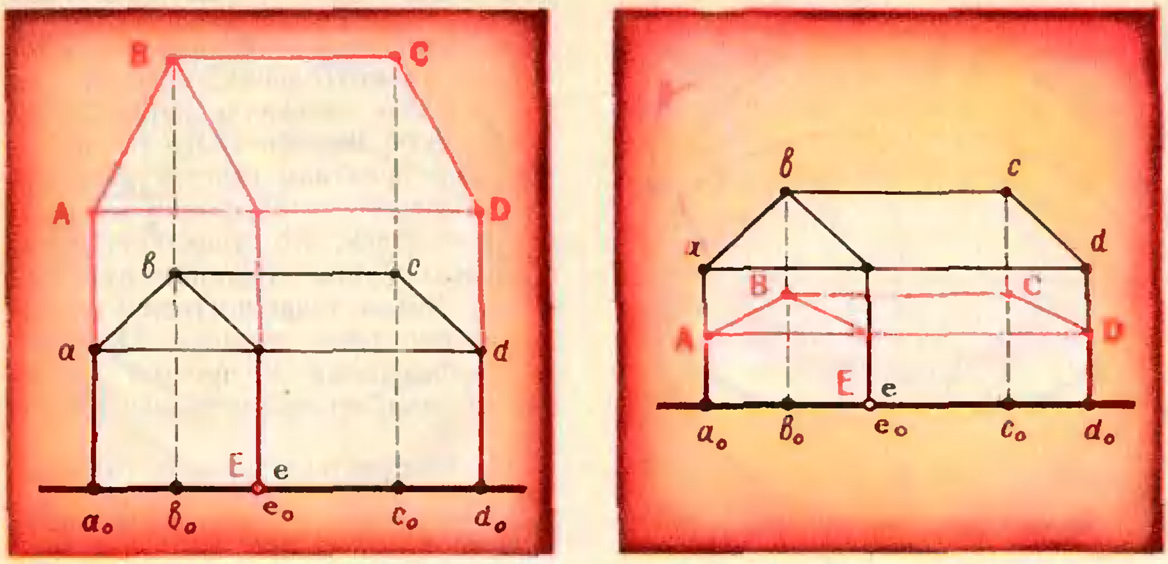


Рис. 3. Деформации с $k=2$ и $k=\frac{1}{2}$. Обратите внимание на изменение скоса крыши.

плоскость сжимается. При $k=1$ все точки плоскости остаются на месте; последний случай называется *тождественным преобразованием*.

Пусть на плоскости П дана какая-нибудь фигура ω (то есть некоторое множество точек). Нас будет интересовать множество Ω всех точек, полученных из ω в результате деформации (см. рис. 3, 4).

Что такое эллипс? Элементы эллипса

Эллипсом называется фигура, полученная деформацией окружности относительно ее диаметра (рис. 5).

Пусть a — радиус окружности; тогда ее диаметр cd, лежащий на оси, перейдет сам в себя ($CD=2a$), перпендикулярный к нему диаметр eh — в отрезок EH ($EH=2ka$). Обозначим длину отрезка OE ($=OH$) через b. Тогда $ka=b$.

Отрезки CD и EH называются *осями* эллипса; числа a и b будем называть *полуосями* эллипса. Если $k>1$ (растяжение), то $b>a$ (рис. 5).

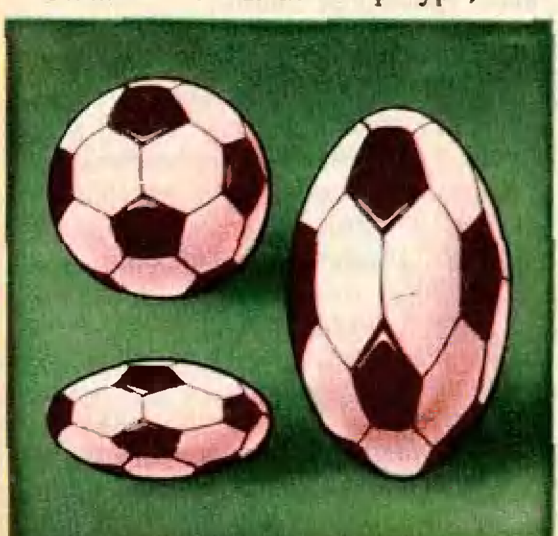


Рис. 4. Деформации изображения футбольного мяча с коэффициентами $k=\frac{1}{2}$ (слева внизу) и $k=2$ (справа).

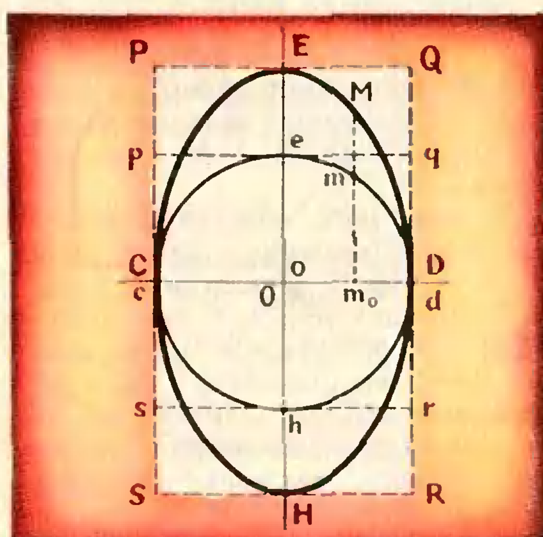


Рис. 5. Эллипс — деформация окружности

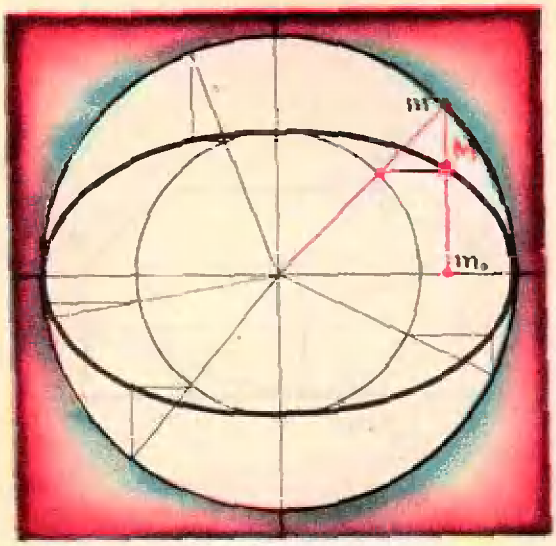


Рис. 6. Так можно построить эллипс.

Если же $k<1$ (сжатие), то $b<a$ (рис. 6). При $k=1$ (тождественное преобразование) окружность перейдет в окружность. Чтобы не нарушать общности определения эллипса, условимся считать окружность частным случаем эллипса ($b=a$). Больший из отрезков CD, EH называется *большой осью* эллипса, меньший — *малой осью*. Итак, если $k>1$, то a — малая полуось и b — большая, а если $k<1$, то наоборот. В обоих случаях $k=\frac{b}{a}$.

Точка o — центр окружности — перейдет при деформации в себя ($o \to O$). O называется *центром* эллипса, точки C, D, E и H — его *вершинами*.

Квадрат $pqrs$, описанный вокруг окружности («матери» эллипса), одна сторона которого параллельна, а другая перпендикулярна к оси деформации, преобразуется в прямоугольник $PQRS$ со сторонами $2a$ и $2b$, описанный вокруг эллипса; он называется *характеристическим* для нашего эллипса, так как полностью его определяет. Стороны характеристического прямоугольника касаются эллипса в его вершинах.

Как начертить эллипс?

Если заданы оси эллипса, то проще всего начертить эллипс от руки, построив сначала характеристический прямоугольник, а затем вписав в него овальную кривую. Но этот способ неточен (хотя после небольшой практики удается уверенно нарисовать почти настоящий эллипс). Мы уже знаем, что существует много овальных кривых с одними и теми же осями. Можно точно построить сколько угодно точек эллипса. Наиболее употребительный и простой способ такого построения изображен на рисунке 6.

На этом рисунке две концентрические окружности имеют радиусы a и b. Разберитесь сами в этом построении и докажите его законность, то есть докажите, что на рисунке 6 $m_0M=m_0m\cdot\frac{b}{a}$.

Сделав это построение для нескольких точек m_1, m_2, m_3, ... окружности радиуса a, мы можем получить сколько угодно точек нашего эллипса. Остается соединить их плавной линией от руки или с помощью лекала.

Но интересно начертить эллипс непрерывным движением, то есть не отрывая карандаша от бумаги, подобно тому как мы вычерчиваем окружность циркулем. Это можно сделать специальным прибором — *эллипсографом*. О нем расскажем ниже, когда познакомимся с уравнением эллипса. Но сначала надо выяснить, что такое уравнение линии.

Уравнение линии *)

Одним из замечательных открытий XVII века является *метод координат*, позволяющий переводить геометрические понятия на алгебраический язык. Этот метод дает возможность установить соответствие между линиями, лежащими в плоскости, на которой установлена система координат, и уравнениями, содержащими две буквы x и y.

Уравнением некоторой линии называется такое уравнение относительно x и y, которое обращается в тождество при подстановке в него значений (x_0, y_0) в том и только в том

*) Подробнее об уравнении линии можно прочесть в любом учебнике аналитической геометрии.

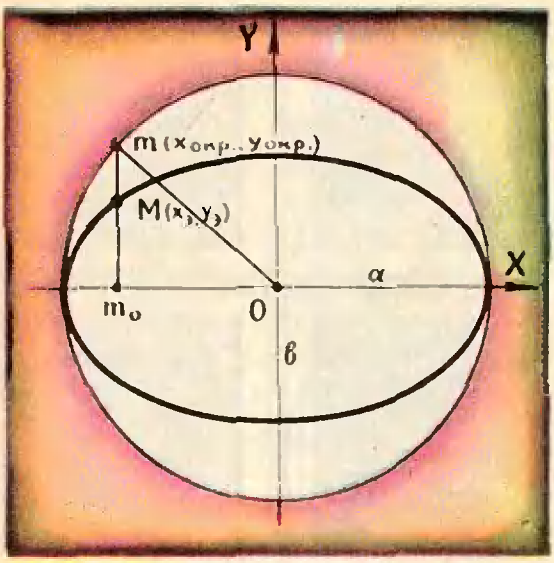


Рис. 7. $m(x_{\text{окр}}, y_{\text{окр}})$ — точка на окружности, $M(x_э, y_э)$ — точка на эллипсе.

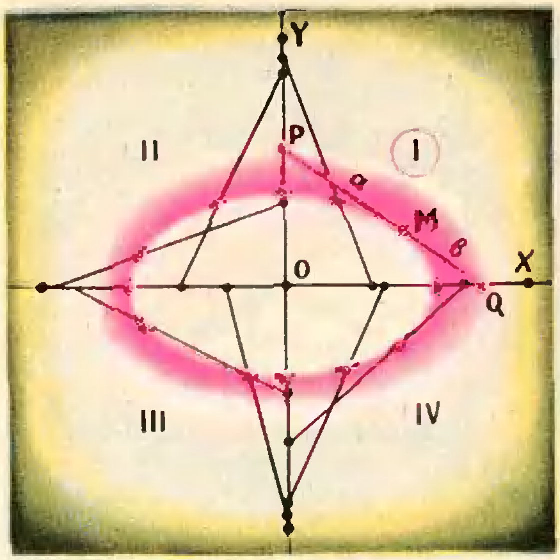


Рис. 8. Точка M описывает эллипс.

случае, когда точка с координатами (x_0, y_0) лежит на данной линии.

Можно также сказать, что линия, определяемая уравнением, есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Например, уравнение $y=x$ есть уравнение биссектрисы I и III координатных углов, а уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат запишется так: $x^2+y^2=a^2$. Оно легко получается из теоремы Пифагора.

Уравнение эллипса

Эллипс с полуосями a и b получен из окружности радиуса a деформацией с коэффициентом $k=\frac{b}{a}$ (рис. 7). Установим на плоскости, где находятся обе эти линии, оси координат; ось OX направим по оси деформации, а ось OY — через центр окружности (он же — центр эллипса) перпендикулярно к оси OX. Пусть m — любая точка окружности, а M — та точка эллипса, в которую переходит m.

Координаты точки m обозначим через $(x_{\text{окр}}, y_{\text{окр}})$, а точки M — через $(x_э, y_э)$. Очевидно, по определению деформации

$$x_э=x_{\text{окр}},\quad y_э=k\cdot y_{\text{окр}},\quad (*)$$

откуда

$$x_{\text{окр}}=x_э,\quad y_{\text{окр}}=\frac{y_э}{k}.$$

Если подставить в уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$ координаты любой ее точки $(x_{\text{окр}}, y_{\text{окр}})$, то будет верно равенство

$$x^2_{\text{окр}}+y^2_{\text{окр}}=a^2,$$

а значит, заменяя $x_{\text{окр}}$ и $y_{\text{окр}}$ по формуле $(*)$, видим, что верным будет также равенство

$$x_э^2+\frac{y_э^2}{k^2}=a^2$$

для любой точки $M(x_э, y_э)$.

Если же точка $M'(X', Y')$ не лежит на эллипсе, то точка $m'(x', y')$, попавшая в M' в результате деформации, не лежала на окружности, и уравнение $(x')^2+(y')^2=a^2$ неверно; значит, неверно и уравнение $(X')^2+\frac{(Y')^2}{k^2}=a^2$.

Из определения уравнения линии получим такое уравнение эллипса

$$x^2+\frac{y^2}{k^2}=a^2.$$

Заметив, что $ka=b$, можно привести это уравнение к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (Э)$$

Это и есть уравнение эллипса в наиболее удобной (так называемой *канонической*) форме.

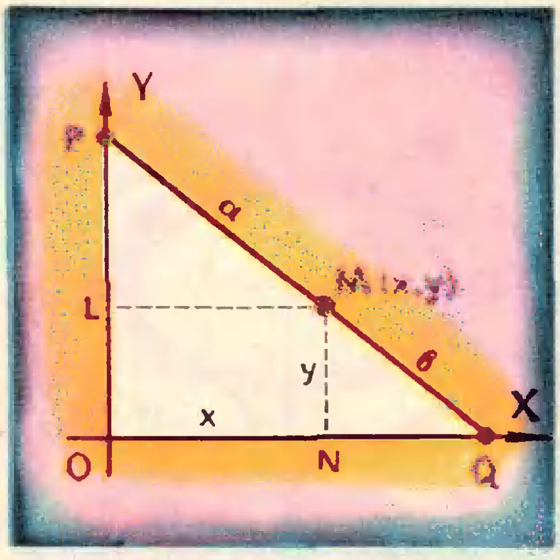


Рис. 9. Точка M отрезка PQ описывает эллипс.

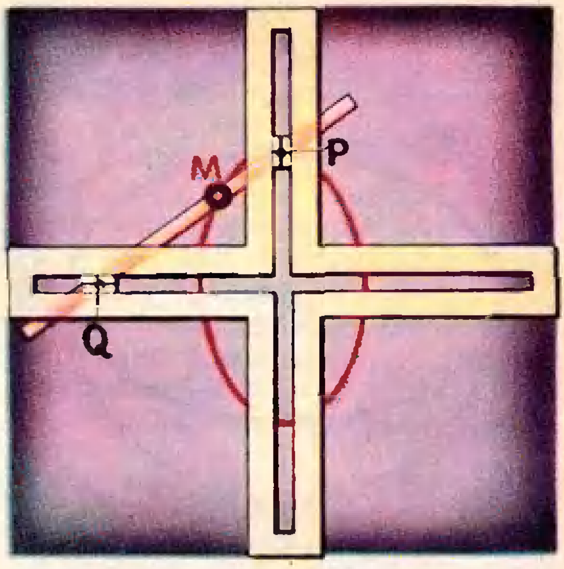


Рис. 10. Эллипсограф.

Эллипсограф

Рассмотрим такую геометрическую задачу (рис. 8).

Отрезок PQ движется в плоскости так, что один его конец Q скользит по прямой OX, а другой P — по перпендикулярной ей прямой OY. Какую линию опишет при этом точка M этого отрезка ($MP=a$, $MQ=b$)?

Докажем, что э т а к р и в а я — э л л и п с. Применим метод координат (рис. 9) — за оси координат примем прямые, по которым скользит отрезок. Пусть координаты точки M — x и y (они зависят от угла PQO). Из подобия треугольников QNM и MLP имеем $\frac{NM}{LP}=\frac{QM}{MP}$, или

$$\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{a}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) еще нельзя назвать уравнением искомой траектории: оно составлено применительно к рисунку 9, где отрезок лежит в I четверти и обе координаты точки M положительны. Только при этом условии можно считать, что $ON=x$, и $NM=y$; если же отрезок находится во II, III или IV четвертях на рисунке 8, то нужно считать $ON=\pm x$, $NM=\pm y$, выбирая каждый раз нужные знаки.

Впрочем, уравнение (1) пригодно и для II четверти, так как x возводится в квадрат и перемена знака x не изменит этого уравнения. Для III и IV четвертей уравнение (1) должно быть заменено на такое:

$$-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{a}. \qquad (2)$$

Пара уравнений (1) и (2) может быть заменена одним уравнением

$$\frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

которое легко приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (Э).$$

Искомая кривая — эллипс.

На полученном результате основана конструкция эллипсографа. На бумагу или чертежную доску накладывается крест, в котором имеются две взаимно перпендикулярные прорези (рис. 10). С прямолинейной планкой соединены три муфточки, которые можно закрепить в любых точках планки. Крайние муфточки P и Q могут ходить в прорезях креста, а средняя M снабжена карандашом, который при движении планки вычерчивает эллипс. Закрепив муфточки по заданным полуосям $PM=a$, $QM=b$, мы можем вычертить эллипс с этими полуосями.

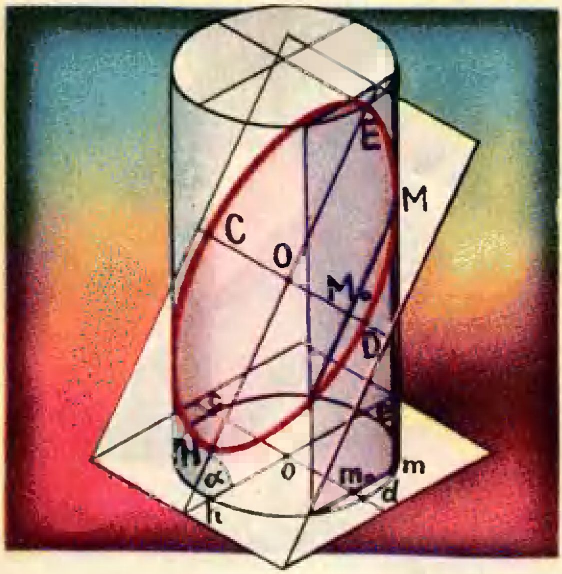


Рис. 11. Эллипс — сечение кругового цилиндра.

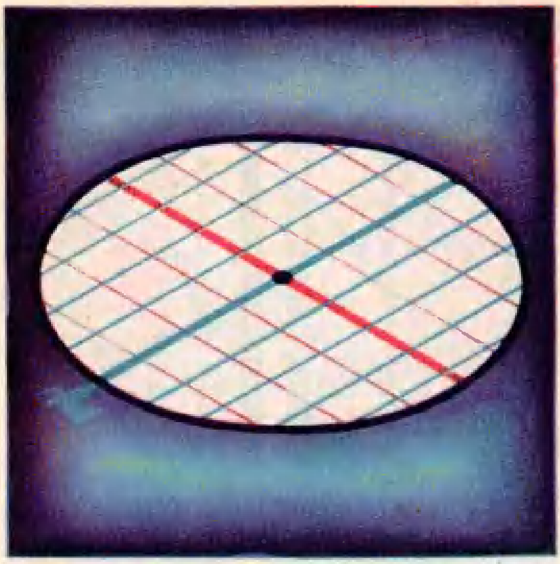


Рис. 12. Сопряженные диаметры эллипса.

Наклонные сечения круглого цилиндра — эллипсы

Пересекая круглый цилиндр плоскостью, не перпендикулярной и не параллельной его оси, мы получаем более или менее вытянутые овалы, в зависимости от угла наклона сечения. Это знает каждая хозяйка, нарезая колбасу для гостей ломтиками и часто (для «экономии») делая угол достаточно острым, чтобы овал имел большую площадь.

Докажем, что эти сечения — не просто овалы, а настоящие эллипсы. Для этого достаточно установить, что овал получается из окружности (основания цилиндра) растяжением; коэффициент k равен $\frac{1}{\cos\alpha}$, где α — угол между плоскостями сечения и основания цилиндра.

Проведем (рис. 11) в основании цилиндра два взаимно перпендикулярных диаметра: cd — параллельный и eh — перпендикулярный к линии пересечения обеих плоскостей, и проведем через них плоскости $cdDC$ и $ehHE$, параллельные оси цилиндра, а также плоскость M_0Mmm_0, параллельную $ehHE$, проходящую через точку M сечения. Зная, что длина проекции отрезка на некоторую прямую равна длине самого отрезка, умноженной на косинус угла между ним и его проекцией, мы получаем

$$\frac{M_0M}{m_0m}=\frac{OE}{oe}=\frac{b}{a}=\frac{1}{\cos\alpha}=k.$$

Если теперь положить обе фигуры $CEDH$ и $cedh$ на одну плоскость, чтобы CD совместилось с cd, то они займут положение, как на рисунке 5, причем $M_0M=$

$$=m_0m\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=m_0m\cdot k,\quad \text{где}\quad k>1.$$

Этим наше утверждение доказано.

Интересно, что для каждого эллипса можно указать такое положение, что он окажется сечением круглого цилиндра, радиус которого равен малой полуоси эллипса. Для этого нужно взять сначала перпендикулярное сечение цилиндра и повернуть плоскость этого сечения вокруг одного из диаметров полученного круга на угол, косинус которого равен $\frac{a}{b}$. Это всегда возможно, так как ~~здесь~~ $0<a<b$.

Сопряженные диаметры эллипса

Из последнего результата сразу следует интересное свойство эллипса: середины всех параллельных хорд эллипса образуют прямолинейный отрезок, проходящий через центр эллипса (рис. 12). Это свойство очевидно

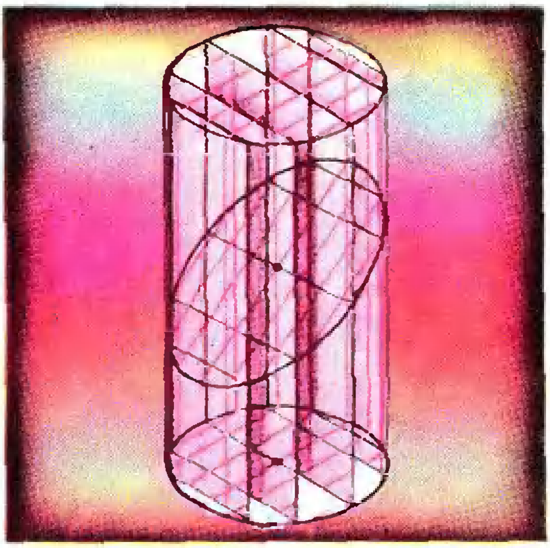


Рис. 13. Доказательство свойства сопряженных диаметров.

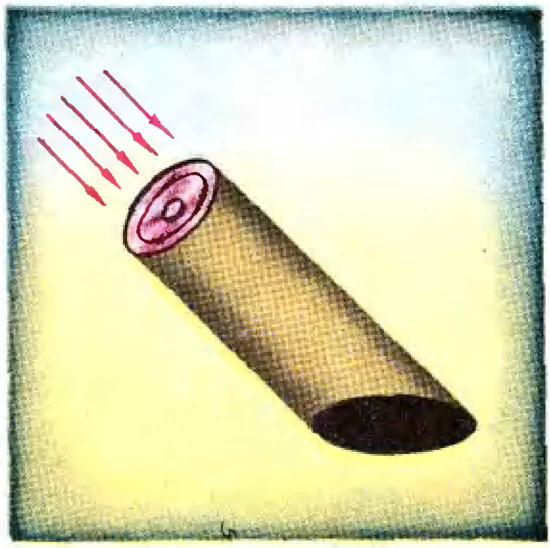


Рис. 14. Проекция окружности — тоже эллипс.

для окружности: середины ее параллельных хорд лежат на диаметре, перпендикулярном к этим хордам. Поставьте теперь эллипс в положение сечения круглого цилиндра и проведите через параллельные хорды эллипса серию плоскостей, параллельных оси цилиндра (рис. 13). В плоскости перпендикулярного сечения цилиндра получатся параллельные хорды окружности, середины которых лежат на ее диаметре. Середины хорд эллипса лежат на пересечении плоскости эллипса и плоскости, проходящей через полученный диаметр и через ось цилиндра. Это — прямолинейный отрезок, очевидно, проходящий через центр эллипса и делящийся в нем пополам.

Хорда эллипса, проходящая через его центр, называется *диаметром эллипса*. У эллипса диаметры, вообще говоря, не равны. Наибольший из них — большая ось, а наименьший — малая. Если провести в эллипсе вторую серию хорд, параллельных полученному диаметру, то их середины лежат на диаметре, принадлежащем к первой серии хорд (рис. 12). Два полученных диаметра называются *взаимно сопряженными*. Для каждого диаметра эллипса существует ему сопряженный. Заметим, что у окружности каждая пара сопряженных диаметров взаимно перпендикулярна, а у эллипса — нет, исключение составляют только оси эллипса.

Проекция окружности — эллипс

Если спроектировать окружность, лежащую в некоторой плоскости, на другую плоскость, не параллельную и не перпендикулярную к первой, то в проекции получится овальная кривая. Она образуется, например, на траве в виде тени от летящего в воздухе диска (рис. 14).

Этот овал — снова эллипс. Доказательство этого читатель легко проведет сам. Здесь не нужно делать даже специального чертежа — достаточно обратиться к рисунку 11, но посмотреть на него с иной точки зрения: будем линию $CEDH$ считать окружностью ($CD=EH=a$), а проектирующий цилиндр — не круглым, а овальным. Здесь $cd=CD=a$, $eh=EH\cdot\cos\alpha=b$. Нужно доказать, что $cedh$ — эллипс; поверхность в этом случае называется *эллиптическим цилиндром* — по форме перпендикулярного сечения.

Путь доказательства тот же, что и в доказательстве теоремы о сечении круглого цилиндра. На этот раз $m_0m=M_0M\cdot\cos\alpha$, где α — угол между плоскостями. Следовательно, овал $cedh$ получен из $CEDH$ сжатием с

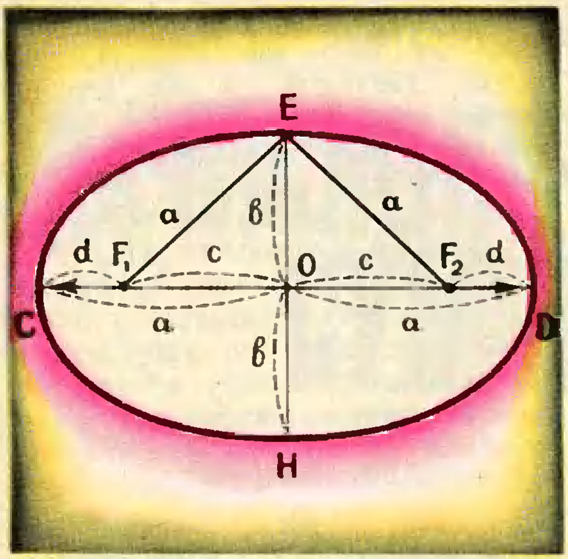


Рис. 15. F_1 и F_2 — фокусы эллипса.

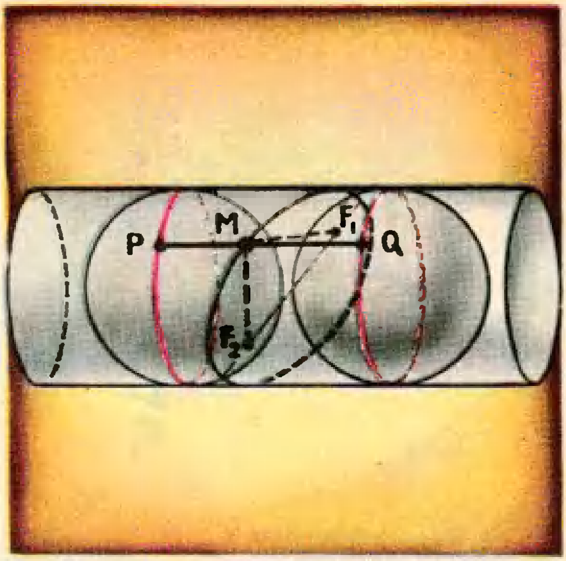


Рис. 16. Доказательство фокального свойства эллипса.

коэффициентом $k = \cos\alpha = \frac{b}{a}$.

Перпендикулярные диаметры окружности проектируются теперь во взаимно сопряженные диаметры эллипса. Этот факт имеет большое значение в теории изображения пространственных фигур на плоскости.

Фокальное свойство эллипса

Мы переходим к наиболее важному свойству эллипса — *фокальному*. Это — прилагательное от слова «фокус»*) — так называются две замечательные точки, лежащие внутри эллипса на его большой оси симметрично относительно центра эллипса. *Расстояние каждого фокуса от концов малой оси эллипса равно половине длины большой оси* (рис. 15).

Будем рассматривать эллипс как сечение круглого цилиндра — мы видели, что всегда имеем право это делать. Вкатим теперь в цилиндр с обоих его концов по шару, вписанному в цилиндр, пока оба шара не стукнутся о плоскость этого сечения (рис. 16) (на геометрическом языке: впишем шары в цилиндр так, чтобы они касались плоскости сечения).

Точки прикосновения F_1 и F_2 и будут фокусами нашего эллипса.

Каждый шар касается цилиндра по окружности. Обе эти окружности изображены на рисунке 16 красным цветом.

Возьмем теперь любую точку M эллипса и отметим ту образующую PQ цилиндра, на которой точка M лежит (P и Q — точки этой образующей, лежащие на красных окружностях). Ясно, что $MQ = MF_1$ — это длины двух касательных к правому шару, проведенных из M до точек прикосновения P и Q. Они равны, как образующие круглого конуса с вершиной M, описанного около левого шара.

Проводя такое же рассуждение для левого шара, получаем аналогичное равенство $MP = MF_2$. Сложив оба равенства, получаем

$$MF_1 + MF_2 = MP + MQ = PQ.$$

Но PQ — одно и то же для *всех* образующих нашего цилиндра: это — расстояние между красными кругами (между центрами наших шаров). Значит, какую бы точку M на эллипсе мы ни взяли, будет иметь место

*) Латинское слово «focus» значит *очаг*. Происхождение этого термина следующее: если поместить в одном фокусе эллипса источник света, то все лучи, отраженные от эллипса по закону «угол падения равен углу отражения», пройдут через второй фокус. Об этом подробнее будет рассказано в одном из номеров «Кванта».

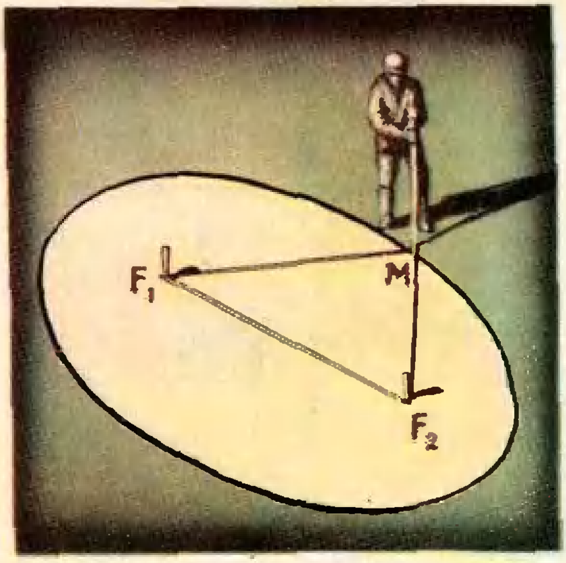


Рис. 17. Так получают эллипс на практике.

равенство $MF_1 + MF_2 = \text{const}$.

Таким образом, *сумма расстояний от любой точки эллипса до двух его фокусов — величина постоянная*. В этом и состоит фокальное свойство эллипса. Часто эллипс и определяется как «геометрическое место» (на современном языке — как множество) таких точек, лежащих в одной плоскости, для которых сумма расстояний до двух точек (фокусов) — величина постоянная.

Если в качестве точки M эллипса выбрать конец его большой оси (например, точку C на рисунке 15), то по фокальному свойству $CF_1 + CF_2 = \text{const}$. Вследствие симметрии $F_1C = F_2D$; значит, эта постоянная равна $CF_2 + F_2D$, то есть большой оси $CD = 2a$. Если же за точку M принять конец малой оси, например, точку E, то $EF_1 + EF_2 = 2a$, а так как в силу симметрии $EF_1 = EF_2$, то каждый из этих отрезков равен a. Это и доказывает утверждение, высказанное в начале этой рубрики, и дает способ построения фокусов эллипса по его осям (рис. 15).

Эллипсограф для садовников

На фокальном свойстве эллипса основано известное построение эллипса непрерывным движением при помощи нитяного кольца. Положим лист бумаги на чертежную доску и наколем на него две канцелярские кнопки. Набросив на обе кнопки нитяное кольцо (периметр кольца должен быть больше удвоенного расстояния между кнопками), натянем нить острием карандаша так, чтобы получился треугольник (ΔF_1F_2M). Если двигать карандашом по бумаге так, чтобы нить оставалась в натянутом положении, то треугольник будет деформироваться, но его периметр остается постоянным. Постоянной остается и длина стороны F_1F_2 — значит, $F_1M + F_2M = \text{const}$ и карандаш опишет эллипс.

Мы получили новый, очень простой эллипсограф. Этот способ с успехом используют... садовники при изготовлении цветочных эллиптических клумб. Вместо кнопок в землю втыкают два кола, кольцо делается из толстой веревки, а эллипс вычерчивается на земле не карандашом, а палкой (рис. 17).

Мы не объяснили происхождения названия «эллипс» (по-гречески «ellipsis» значит «недостаток» — при чем здесь недостаток?), не рассказали о многих других очень важных свойствах этой кривой — свойствах, общих для всех конических сечений: эллипса, гиперболы и параболы. Эти вопросы будут освещены в следующих номерах «Кванта».

Пространственные рисунки в этой статье дают лишь общее представление об их сути. При выполнении рисунков было отдано предпочтение наглядности, а не строгим правилам изображения пространственных фигур на плоскости *).

О законах изображения на плоскости пространственных фигур будет рассказано в одном из ближайших номеров журнала.

---

*) Попробуйте доказать, что гипербола, приведенная на стр. 26, изображена, строго говоря, неверно.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ

А. Д. Бендукидзе,
А. К. Сулаквелидзе

Вычисление сумм — один из важнейших и интереснейших вопросов математики. Существуют разные методы вычисления сумм. В статье рассказывается о двух из них.

1. В математике и ее многочисленных приложениях для сокращенной записи суммы употребляется специальный знак. Это Σ — буква греческого алфавита «си́гма». Запись суммы посредством знака Σ часто бывает очень удобной. Познакомимся с этим знаком.

Пусть дана сумма вида

$$a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Все слагаемые этой суммы обозначены одной буквой, для отличия использованы индексы. Данную сумму сокращенно можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Читается: «сигма a_k, k меняется от 1 до n». Для такой записи берется «типичное» слагаемое суммы, в нашем случае a_k *), перед ним пишется знак Σ и указываются границы изменения k. Например, запись

$$\sum_{k=1}^{10} k$$

означает сумму

$$1+2+3+4+5+6+7+8+\\+9+10,$$

а запись

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

— сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Нетрудно проверить следующие свойства знака Σ:

$$\sum_{k=1}^{n} 1=n, \quad \sum_{k=1}^{n} ca_k=c\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Проверим, к примеру, второе свойство.

По определению

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k=ca_1+ca_2+\ldots+ca_n,$$

поэтому, согласно известному свойству суммы, имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k=c(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Но выражение в скобках есть не что иное, как

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k=c\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

*) a_k называется общим членом суммы.

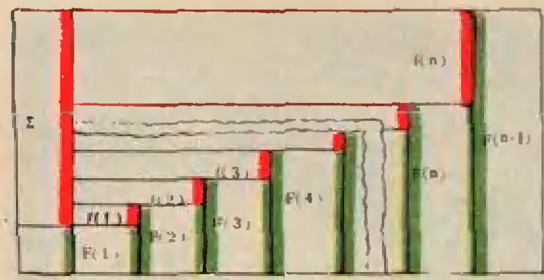


Рис. 1.

Аналогично проверяются остальные два свойства.

2. Рассмотрим вопрос о вычислении сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n), \quad (1)$$

где f — известная функция целочисленного аргумента, определенная на отрезке $[1, n]$ натурального ряда.

Эту сумму легко вычислить, если удастся найти такую функцию F, определенную на отрезке $[1, n+1]$ натурального ряда, что при всех k, $1 \leqslant k \leqslant n$, справедливо равенство

$$f(k) = F(k+1) - F(k). \quad (2)$$

В самом деле, полагая в этом равенстве последовательно $k = 1, 2, \ldots, n-1, n$, получим:

$$f(1) = F(2) - F(1),$$
$$f(2) = F(3) - F(2),$$
$$f(3) = F(4) - F(3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(n-1) = F(n) - F(n-1),$$
$$f(n) = F(n+1) - F(n).$$

Складывая эти равенства, приходим к следующей формуле:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = F(n+1) - F(1). \quad (3)$$

Таким образом, если функция F найдена, сумма (1) вычисляется элементарно.

Проиллюстрируем формулу (3) геометрически.

На рисунке 1 нам нужно найти сумму (1), обозначенную просто через Σ, как длину вертикального отрезка. Каждый член вида $f(k)$ соответствует длине красного отрезка, равной разности длин зеленых отрезков $F(k+1)$ и $F(k)$. Очевидно, сумма длин всех красных отрезков равна разности длин первого и последнего из зеленых отрезков.

Пример 1. Вычислим сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

то есть

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Здесь

$$f(k) = \frac{1}{k(k+1)},$$

и, как нетрудно проверить, ее можно представить в виде следующей разности:

$$f(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Поэтому, если обозначить

$$F(k) = -\frac{1}{k},$$

то формула (2) будет выполнена для всех натуральных k:

$$f(k) = F(k+1) - F(k).$$

Применяя формулу (3), легко получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Пример 2. Найдем сумму членов следующей геометрической прогрессии:

$$q,\ q^2, q^3, \ldots, q^n \qquad (q \neq 1).$$

Здесь $f(k) = q^k$, и, воспользовавшись равенством $q^{k+1} - q^k = q^k(q-1)$, можно написать

$$q^k = \frac{q^{k+1}}{q-1} - \frac{q^k}{q-1}.$$

Отсюда видно, что можно положить

$$F(k) = \frac{q^k}{q-1},$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}}{q-1} - \frac{q}{q-1} = \frac{q^{n+1} - q}{q-1}.$$

Получили известную формулу.

Пример 3. Вычислим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx \quad (x \neq 2\pi n).$$

Нетрудно проверить, что

$$\sin kx = \frac{\cos(k-0,5)x - \cos(k+0,5)x}{2\sin 0,5x},$$

то есть

$$\sin kx = F(k+1) - F(k),$$

где

$$F(k) = -\frac{\cos(k-0,5)x}{2\sin 0,5x}$$

Теперь на основании формулы (3) после несложных преобразований получим

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin 0,5(n+1)x \sin 0,5nx}{2\sin 0,5x}.$$

Читатель сам убедился, что формула (3) дает эффективный способ вычисления суммы (1). Главное — нахождение функции F. Нередко, к сожалению, это — задача не из легких, а иногда даже неразрешимая.

3. Пусть теперь заданы две конечные последовательности чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n,$$

и

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \qquad (4)$$

и требуется вычислить сумму

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k.$$

Здесь часто бывает полезным одно преобразование, которое было указано замечательным норвежским математиком Абелем. Именно пусть V_k — сумма первых k членов последовательности (4), то есть

$$V_k = \sum_{i=1}^{k} v_i = v_1 + v_2 + \ldots + v_k.$$

Ясно, что $v_1 = V_1$; если же $k > 1$, то

$$v_k = V_k - V_{k-1}.$$

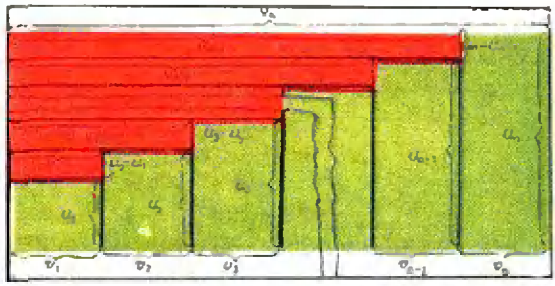


Рис. 2.

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n =$$
$$= u_1 V_1 + u_2 (V_2 - V_1) + \ldots$$
$$\ldots + u_n (V_n - V_{n-1})$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые по два, получим

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = (u_1 - u_2) V_1 + (u_2 - u_3) V_2 + \ldots$$
$$\ldots + (u_{n-1} - u_n) V_{n-1} + u_n V_n$$

или окончательно:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k. \qquad (5)$$

Геометрическая интерпретация этого способа дана на рисунке 2. Каждый член вида $u_k v_k$ соответствует площади прямоугольника (зеленого). Члены вида $(u_{k+1} - u_k) V_n$ соответствуют площадям красных прямоугольников. Выражение $u_n V_n$ есть площадь всего прямоугольника. После этого формула (5) становится очевидной.

Пример. 4. Вычислим сумму

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Обозначим искомую сумму через S и запишем ее, используя знак Σ:

$$S = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Выражение k^2, стоящее под знаком суммы, представим в виде произведения kk и применим к S преобразование Абеля, положив

$$u_k = v_k = k.$$

Так как

$$u_{k+1} - u_k = 1,$$

$$V_k = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

то

$$S = \frac{n^2(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k.$$

Учитывая равенства

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - n^2 = S - n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2},$$

получим

$$S = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}n^2 -$$

$$-\frac{1}{4}n(n-1).$$

Отсюда уже нетрудно найти S:

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad *).$$

Пример 5. Вычислим следующую сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k.$$

Положив $u_k = k$, $v_k = 2^k$, имеем

$$u_{k+1} - u_k = 1, \quad V_k = 2^{k+1} - 2$$

и, согласно формуле (5),

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = n(2^{n+1} - 2) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} - 2).$$

Элементарные вычисления дают

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

4. Для искушенного читателя, знакомого с понятием интеграла, заметим, что формулы (3) и (5) для конечных сумм являются аналогами известных формул интегрального исчисления.

Так как существуют функции, от которых интегралы (неопределенные) не берутся, то не всегда существует искомая функция $F(x)$.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить следующие суммы

а) $\sum\limits_{k=1}^{100} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$; в) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$;

г) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

д) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$; е) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x$;

ж) $\sin 1^\circ \left(\frac{1}{\sin 1^\circ \sin 2^\circ} + \frac{1}{\sin 2^\circ \sin 3^\circ} + \ldots + \frac{1}{\sin 89^\circ \sin 90^\circ}\right)$

2. а) вычислить сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} kq^k$;

б) вычислить сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$,

где $\{a_k\}$ — арифметическая прогрессия, а $\{b_k\}$ — геометрическая.

3. Используя преобразования Абеля, вычислить следующие суммы:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$; б) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \sin kx$; г) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cos kx$.

---

*) Этот прием называется неявным заданием суммы S. Используя какие-либо свойства общего члена a_n, найдем уравнение относительно S, из которого определим само S. В примере 2 можно было бы написать $S = qS - q^{n+1} + q$, откуда

$$S = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}.$$

ШАРИК ВМЕСТО ЛИНЗЫ

Г. И. Косоуров

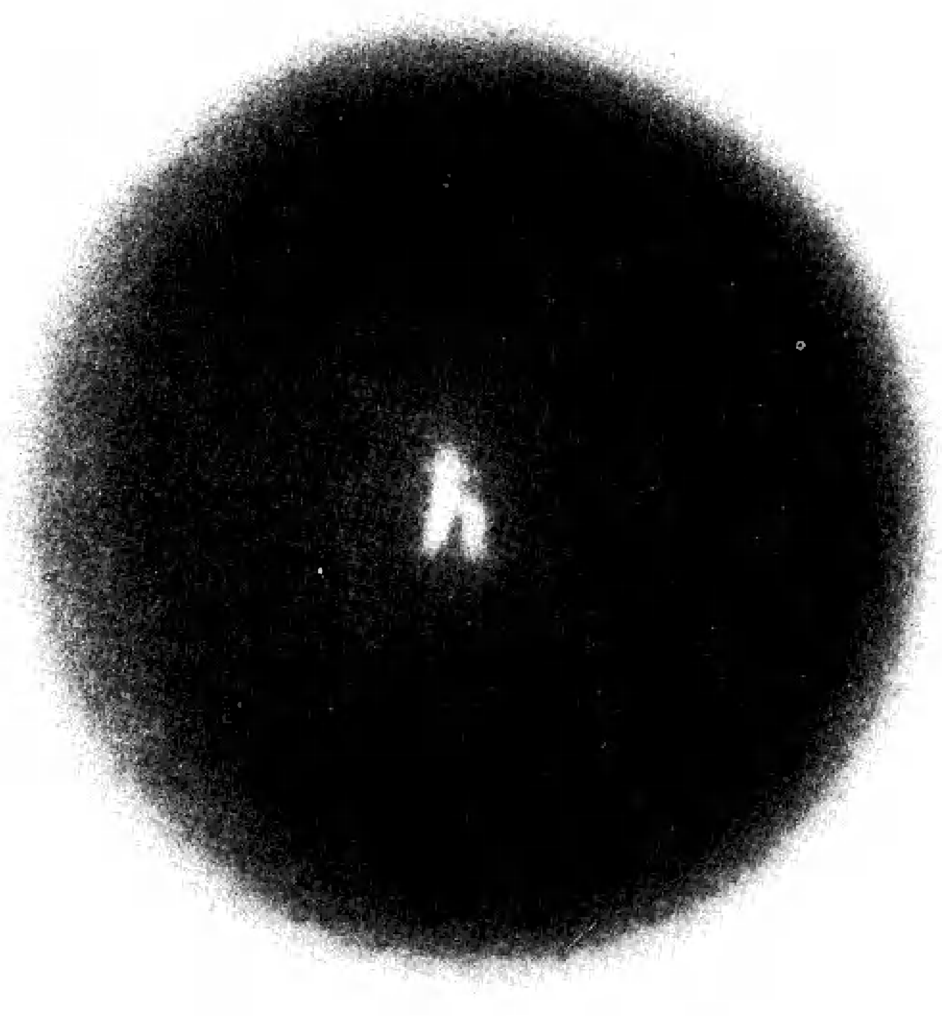


Рис. 1. Фотография, полученная камерой «Зенит», у которой объектив заменен листком черной бумаги с отверстием. Диаметр отверстия 0,2 *мм*, чувствительность пленки 65 ед., выдержка 5 *сек*.

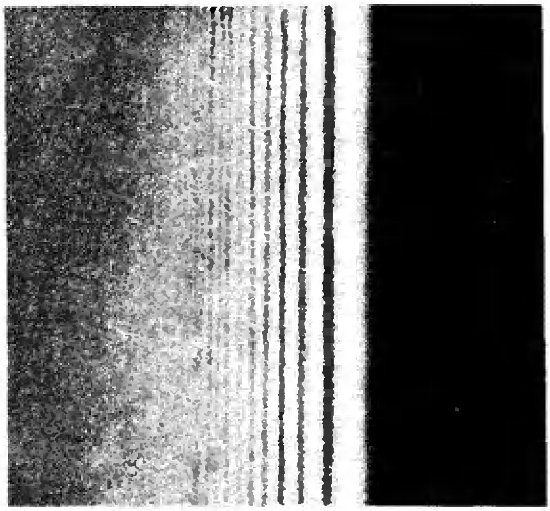


Рис. 2. Дифракция от прямолинейного края непрозрачного экрана. Тень снята на расстоянии 0,5 *м* от экрана в белом свете через красный светофильтр. Снимок увеличен. Расстояние между двумя первыми темными полосами равно 0,6 *мм*.

В основе геометрической оптики лежит представление о прямолинейности световых лучей. Этому учит нас практика. Вы сами можете легко провести опыт, подтверждающий прямолинейность распространения света. Замените объектив фотоаппарата листком черной бумаги, в котором проколото маленькое отверстие. Такой «дырочной камерой» (ее называют камерой-обскурой) можно получать фотографии ярко освещенных предметов, подобно фотографии, приведенной на рисунке 1. Изображение на пленке точно соответствует центральной проекции точек предмета прямыми, проходящими через отверстие, что является веским аргументом в пользу представления о лучах света как о прямых линиях.

Образование тени на белом экране от непрозрачного предмета мы объясняем как проекцию контура предмета на плоскость экрана лучами, выходящими из каждой точки источника света. Так как источник света обычно имеет довольно большие размеры, граница тени окружена полутенью и размыта. Можно было бы думать, что, уменьшая размеры источника, мы будем сужать область полутени и в пределе получим резкую тень. Однако опыт показывает совсем другое. Когда источник света становится достаточно мал, обнаруживаются явления, которые раньше маскировались полутенью. Прямой край непрозрачной пластинки вместо резкой тени дает картину, приведенную на рисунке 2. Край тени размыт, а параллельно ему идут темные и светлые полосы уменьшающейся контрастности. Если источник света белый, то полосы окрашены в радужные цвета.

Тень от тонкой проволоки (рис. 3) также имеет сложную структуру. Снаружи она окаймлена полосами, как у края непрозрачной пластинки, а внутри тени видны темные и светлые полосы, тем более узкие, чем толще проволока.

Совсем неожиданно выглядит тень от шарика или от маленького непрозрачного диска (рис. 4). Кроме темных и светлых колец, окружающих тень и аналогичных уже знакомым нам полосам, в центре тени можно видеть яркое светлое пятно, как будто бы в центре диска проколото маленькое отверстие.

Явления, в которых обнаружива-

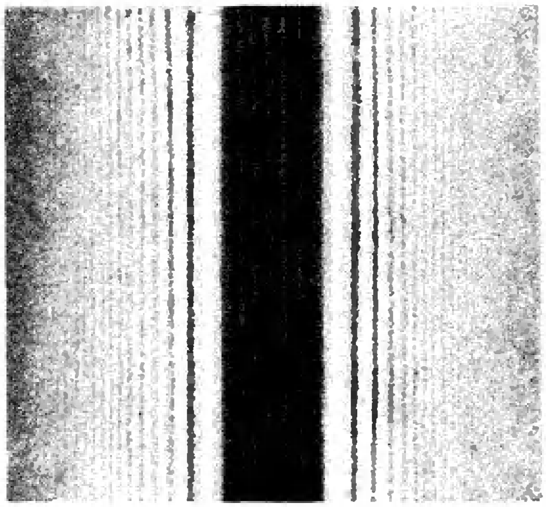


Рис. 3. Дифракция от тонкой проволоки. Снимок в белом свете через красный светофильтр. Диаметр проволоки 1,2 *мм*. Расстояние от проволоки до пленки 0,5 *м*.

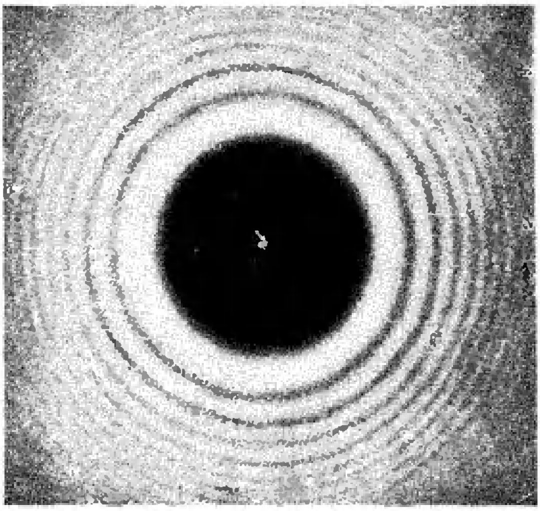


Рис. 4. Дифракция на шарике. Диаметр шарика 2,5 *мм*, $R_1=R_2=0{,}5$ *м*. Красный светофильтр.

ется, что свет распространяется не строго по законам геометрической оптики, называются дифракционными. Их причина лежит в волновой природе света. Точное описание распространения света дает не построение лучей, а картина распространения волн.

Представим себе круговые волны, расходящиеся от брошенного камня по спокойной поверхности пруда. Если волны достигают плавающего на поверхности бревна, то за бревном образуется вполне четкая тень, границы которой определяются лучами, проведенными из точки падения камня через концы бревна. Однако в области тени тоже можно заметить волнение поверхности воды, хотя и более слабое. Это и есть дифракция, которая в данном случае не очень искажает картину геометрической тени. Если же волны встретят на своем пути сваю, то уже на небольшом расстоянии за ней картина распространения волн будет мало походить на геометрическую тень. Наконец, если волны встретят торчащий из воды тонкий шест, то тень вообще не образуется. Волны свободно огибают малые препятствия. На поверхности воды можно будет заметить лишь слабую круговую волну, рассеянную шестом.

Таким образом, при распространении волн могут встретиться как случаи, когда прямолинейные лучи хорошо описывают наблюдаемые явления, так и случаи, когда преобладает дифракционная картина. Все зависит от соотношения между длиной волны, размерами препятствия (или отверстия), ограничивающего волну, и расстоянием до плоскости наблюдения. Коротко это можно сформулировать так: если из точек экрана, на котором мы наблюдаем тень, препятствие или отверстие видно под углом большим, чем угол, под которым видна длина волны с расстояния, равного поперечнику препятствия, то дифракция не сильно искажает лучевую картину. В виде формулы это можно записать так: $\frac{a}{R} \gg \frac{\lambda}{a}$, где a — размер отверстия, R — расстояние до экрана, на котором наблюдается тень, и λ — длина волны. Если же углы сравнимы или первый угол меньше второго, то есть $\frac{a}{R} \leqslant \frac{\lambda}{a}$, то дифракция играет определяющую роль и лучевые представления неприменимы.

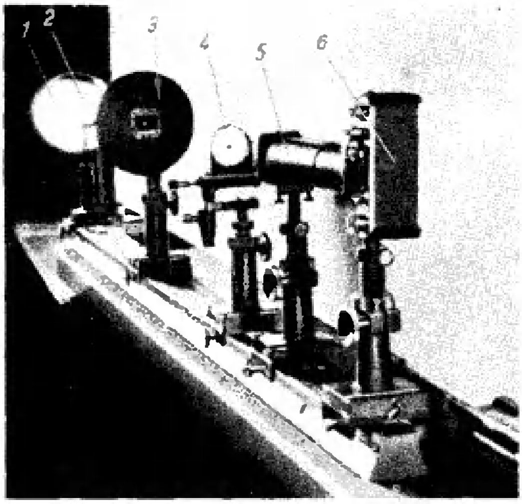


Рис. 5. Установка для наблюдения и фотографирования дифракционных картин. 1 — лампа, 2 — проектирующая линза, 3 — точечная диафрагма со светозащитным экраном, 4 — держатель с объектами дифракции, 5 — светозащитная труба, 6 — фотоаппарат без объектива.

В оптике чаще всего имеют дело с первым случаем, так как длины волн видимого света очень малы (от 0,7 *мк* для красного света до 0,4 *мк* для фиолетового), но на больших расстояниях от маленького отверстия или от тонкой проволоки может встретиться и второй случай.

Наблюдать явления дифракции света можно с помощью весьма скромных средств. Проколите в тонкой фольге кончиком острой иголки отверстие 0,1—0,2 *мм* и наклейте фольгу на лист картона с отверстием, который нужен для того, чтобы свет от источника — обычной настольной лампы — не мешал наблюдениям. Установив лист картона на подставке, спроектируйте на него линзой с фокусным расстоянием 4—6 *см* увеличенное изображение волоска лампы так, чтобы часть изображения волоска пришлась на отверстие в фольге. За отверстием образуется световой конус, который легко найти по светлому кружку на матовом стекле или глазом (когда глаз попадает в световой конус, отверстие кажется ярко светящимся). На расстоянии около 0,5 *м* от отверстия в пучок света будем помещать объекты, а дифракционную картину будем наблюдать на расстоянии тоже около 0,5 *м* за объектом. Вести наблюдение следует через слабую лупу или линзу с фокусным расстоянием 2—5 *см*, укрепив ее на подставке, а глаз располагать на таком расстоянии от линзы, чтобы она вся казалась ярко освещенной. На светлом фоне хорошо будет видна дифракционная картина.

На рисунке 5 приведена фотография установки, на которой получены все помещенные в этой статье дифракционные картины. Была использована оптическая скамья, что, конечно, не обязательно, однако если вам удастся воспользоваться для укрепления объектов какими-либо штативами с винтовыми перемещениями, то приводить дифракционную картину в центр поля зрения будет значительно легче.

Тень от прямолинейного края непрозрачного экрана вам даст лезвие безопасной бритвы. Из двух лезвий можно сделать щель шириной 0,3—1 *мм*. Кусочек проволоки диаметром до 1 *мм* продемонстрирует дифракцию от узкого экрана. Интересно выглядит дифракция от кончика иголки.

Для наблюдения светлого пятна в центре тени от круглого предмета возьмите стальной шарик от подшипника диаметром 2—4 *мм*. Капелькой клея приклейте шарик к стеклянной пластинке. (Необходимо следить за тем, чтобы клей не выступал за контур шарика, а поверхности стекла и шарика были чистыми.) Когда клей подсохнет, укрепите пластинку с шариком на установке. Перемещая пластинку, приведите тень от шарика в центр поля зрения. При этом будут хорошо видны и внешние дифракционные кольца, и пятно в центре, окруженное темными и светлыми кольцами.

Вы, вероятно, захотите получить фотографии дифракционных картин. Это легко сделать, если воспользоваться фотоаппаратом с вывинченным объективом. Тень от объекта

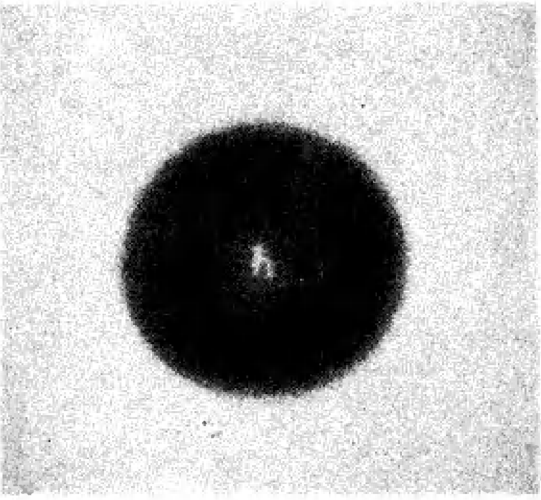


Рис. 6. Фотография, полученная с помощью шарика. Внешние кольца размыты. Диаметр шарика 4 *мм*. Высота символа $\hbar$ 1 *мм*. Диапозитив был получен фотографированием на контрастной пленке буквы, вычерченной тушью на белой бумаге.

проектируется прямо на плоскость пленки. Чтобы дифракционные полосы на фотографии были более четкими и число их было больше, отверстие, служащее источником света, надо закрыть светофильтром, лучше красным, так как в спектре лампы накаливания много красных лучей. Для обычных пленок экспозиция в 5—10 *сек* оказывается достаточной. Чтобы избежать засветки пленки, между аппаратом и объектом нужно поместить зачерненную внутри трубу.

Смещение источника света вызывает смещение тени, а значит, и пятна. Поэтому, если вместо точечного источника вы возьмете диапозитив малого размера, то каждая прозрачная точка на нем даст свою, слегка смещенную тень шарика со своим светлым пятном. В результате внешние дифракционные кольца размажутся, а в центре тени можно будет увидеть изображение диапозитива. Шарик будет действовать как линза. Именно так была получена фотография символа постоянной Планка (рис. 6).

Просверлив в тонкой жести круглое отверстие диаметром около 2 *мм*, вы сможете проследить, как меняется дифракционная картина от круглого отверстия на разных расстояниях от него. Закрыв источник света светофильтром и приближая глаз с лупой к отверстию, начиная с расстояний 1—2 *м*, вы увидите, как в центре картины появляются черные кружки, которые при приближении глаза превращаются в темные кольца, расходящиеся к краям тени. Число темных колец, считая и темное пятно в центре, определяется разностью путей света для центрального луча и луча, идущего от края отверстия. Этим можно воспользоваться для определения длины волны света. Чтобы произвести вычисления, необходимо знать диаметр отверстия, измерить расстояние от источника света до отверстия и расстояние от отверстия до плоскости наблюдения. Определить положение плоскости наблюдения можно, поместив в поле зрения лупы иголку и двигая ее до тех пор, пока она не будет представляться глазу резкой на фоне изучаемой дифракционной картины. Положение иголки и определит плоскость, рассматриваемую в лупу. Как вывести расчетную формулу, мы поясним ниже.

В белом свете можно наблюдать красивую смену окраски дифракционных колец. Цвета, которые вы увидите, не похожи на спектральные. Они называются дополнительными и наблюдаются тогда, когда из полного спектра белого света удаляется какая-нибудь одна спектральная область. В нашем случае, когда, например, в центре получается темное пятно для зеленого света, остальные части спектра, то есть красно-оранжевый и фиолетовый, окрашивают центр картины в пурпурный цвет. Отсутствие красного приводит к зелено-голубому дополнительному цвету и т. д. На рисунке 7 приведены примеры дифракционных картин от круглого отверстия.

Почему же в центре, куда волны приходят, казалось бы, беспрепятственно, появляется темное пятно?

Вернемся к нашим наблюдениям

Рис. 7. Дифракция от круглого отверстия. *а*) Диаметр отверстия 1 *мм*, $R_1=R_2=0{,}5$ *м*. Красный светофильтр. Отверстие открывает две зоны. В центре черное пятно. *б*) То же с синим светофильтром. Отверстие открывает почти три зоны. *в*) Диаметр отверстия 1,5 *мм*, $R_1=R_2=0{,}5$ *м*. Красный светофильтр. Отверстие открывает немного более четырех зон.

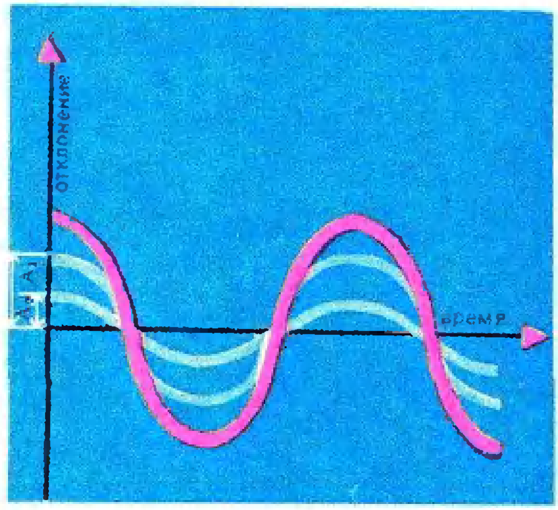


Рис. 8. Сложение колебаний, усиливающих друг друга.

волн на поверхности пруда. Представим себе, что одновременно в пруд бросили два камня и по его поверхности распространяются две системы волн. Тогда на поверхности пруда найдутся точки, в которые одновременно приходят горбы от обеих систем волн. Через некоторое время в эти же точки одновременно придут впадины волн. Волны будут усиливать друг друга, как это показано на рисунке 8. Усиление будет происходить в точках, лежащих на равных расстояниях от источников волн. Кроме того, волны будут усиливаться в тех точках, расстояния от которых до

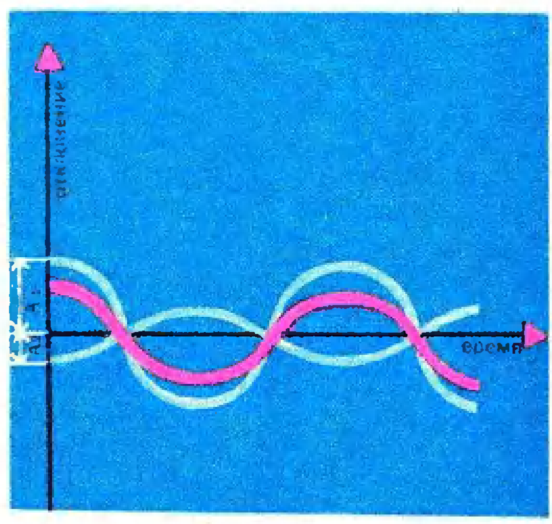


Рис. 9. Сложение колебаний, ослабляющих друг друга.

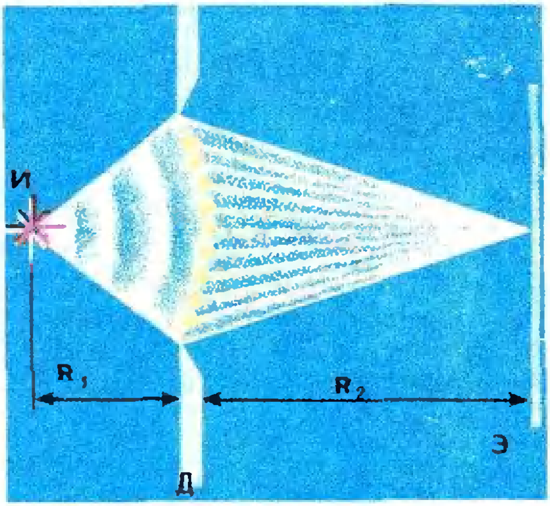


Рис. 10. Источник света можно заменить вторичными источниками.

источников волн отличаются на целую длину волны, на две длины волны и т. д. В тех точках, до которых одновременно доходят горбы от одной волны и впадины от другой, волны будут ослабляться, гасить друг друга, как это показано на рисунке 9. Описанное явление называется интерференцией. Оно играет решающую роль в образовании дифракционных картин.

Каждая точка пространства, через которую проходит световая волна, сама может рассматриваться как источник вторичной сферической волны (рис. 10). Если свет проходит через круглое отверстие в непрозрачном экране, то мы можем заменить источник света вторичными источниками, распределенными по площади отверстия. Все эти источники будут колебаться в такт с первичной волной, дошедшей до отверстия. Амплитуда колебаний в точке наблюдения за экраном найдется как сумма колебаний, которые вызывает в этой точке каждый вторичный источник. При этом необходимо учесть, что волны от разных источников проходят разные пути и, складываясь, могут не только взаимно усиливаться, но и ослабляться.

Проследим, как будет меняться амплитуда колебаний на оси круглого отверстия, освещенного точечным источником света. Когда расстояние до точки наблюдения очень велико по сравнению с диаметром отверстия, волны от всех вторичных источников проходят почти одинаковые пути и, приходя в точку наблюдения, взаимно усиливаются. При приближении точки наблюдения к отверстию вторичные волны от источников, расположенных на краю отверстия, будут заметно отставать от волн, пришедших от источников центральной зоны, и результирующая амплитуда будет уменьшаться. Когда луч, проведенный в точку наблюдения от края отверстия, станет длиннее луча, проведенного из центра, на целую длину волны, наступит полная компенсация колебаний, и в центре дифракционной картины мы увидим темное пятно. Еще приблизив экран, мы нарушим компенсацию колебаний на оси, и центр дифракционной картины снова станет светлым. Теперь возникнет компенсация на некотором расстоянии от оси, и центр дифракционной картины будет окружен темным кольцом. Когда крайний луч отстанет от центрального на две длины волны, снова наступит компенсация колебаний на оси. Дифракционная картина будет иметь вид светлого пятна с темным центром и с одним темным кольцом.

Появление темного пятна в центре дифракционной картины будет периодически повторяться по мере приближения экрана, на котором наблюдается дифракционная картина, к экрану с отверстием. Сосчитав число темных колец, можно сказать, сколько раз произошла компенсация на оси. То же самое можно увидеть, если менять не расстояние до точки наблюдения, а радиус отверстия. Этих указаний достаточно для того, чтобы вы сами вывели формулу для определения длины волны.

Итак, желаем успеха! Надеемся, что физические кабинеты ваших школ пополнятся коллекциями дифракционных картин, сфотографированных вами, и что в редакцию «Кванта» вы пришлете наиболее удачные фотографии.

ЗАДАЧНИК Кванта

В этом и следующих номерах раздел «Задачник Кванта» составлен из задач, предлагавшихся на всесоюзных олимпиадах по физике и математике 1970 года. После каждой задачи в скобках указан класс, в котором она предлагалась.

Ф48. На вал якоря динамо-машины намотана веревка, к которой прикреплен груз. Опускаясь, груз вращает якорь. Когда якорь достаточно раскрутился, к клеммам машины присоединили сопротивление нагрузки. Изобразите на графике зависимость скорости вращения якоря от времени с момента начала движения груза. (X)

Г. И. Косоуров

Ф49. U-образная трубка заполнена водой. Из одного колена воздух удален; давление воздуха в другом колене при температуре $t = 20^\circ$ С равно атмосферному. Оба конца трубки запаяны. Разность между уровнями воды в коленах равна 15 *м*. Какой будет разность уровней воды в коленах, если трубку нагреть до 100° С? (IX—X)

Б. Б. Буховцев

Ф50. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика с массами m, соединенные пружинкой жесткости k и длины l_0 в нерастянутом состоянии. На левый кубик (рис. 1) внезапно начинает действовать постоянная по величине и направлению сила F. Найдите минимальное и максимальное расстояния

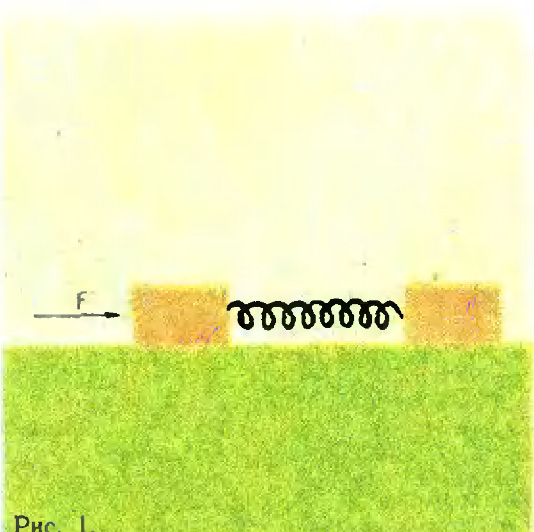


Рис. 1.

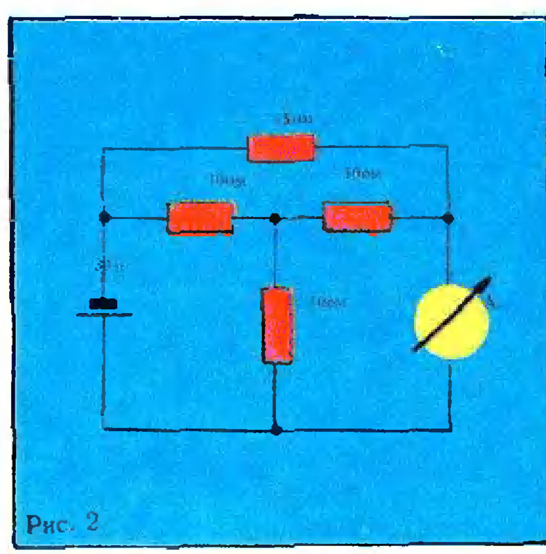


Рис. 2

между кубиками при дальнейшем движении системы. (X)

Б. Б. Буховцев

Ф51. Фотографировать тигра с расстояния менее 20 метров опасно. Какой размер может иметь камера-обскура с отверстием диаметром в 1 *мм*, чтобы тигр на фотографии был полосатым? Расстояние между полосами на шкуре тигра равно 20 *см*. (X)

А. Л. Стасенко

Ф52. Мяч брошен вертикально вверх. Что больше: время подъема или время падения? (VIII)

Ф53. В сосуде находятся две несмешивающиеся жидкости с удельными весами d_1 и d_2 и толщинами слоев h_1 и h_2 соответственно. С поверхности жидкости в сосуд опускают маленькое обтекаемое тело, которое достигает дна как раз в тот момент, когда его скорость становится равной нулю. Какова плотность материала, из которого сделано тело? (VIII)

М. М. Балашов

Ф54. Что покажет амперметр в схеме, изображенной на рисунке 2? Сопротивление амперметра очень мало. (VIII—IX)

А. Р. Зильберман

М41. Дана окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Построить на окружности две точки X и Y, симметричные относительно диаметра AB, для которых прямая YC перпендикулярна к прямой XA. (VIII)

М42. Цифры некоторого семнадцатизначного числа записываются в обратном порядке. Полученное число складывается с первоначальным. Доказать, что хотя бы одна из цифр их суммы будет четной. (VIII)

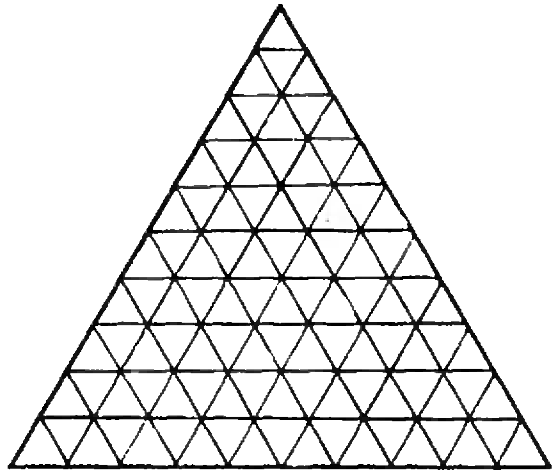


Рис. 3.

М43. Каждая сторона правильного треугольника разбита на n равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбился на n^2 маленьких треугольничков (рис. 3). Назовем «цепочкой» последовательность треугольничков, в которой ни один не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее возможное число треугольничков в цепочке? (VIII—X)

М44. Доказать, что для каждого натурального числа K существует бесконечно много натуральных чисел T, не содержащих нулей в десятичной записи и таких, что T и KT имеют одинаковые суммы цифр. (X)

М45. Доказать, что из любых двухсот целых чисел можно выбрать сто чисел, сумма которых делится на 100. (IX)

Попробуйте обобщить эту задачу: докажите, что из любых $2n-1$ чисел можно выбрать n, сумма которых делится на n, где $n \geqslant 2$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧНИКА КВАНТА

М6. Перед вами часы. Сколько существует положений стрелок, по которым нельзя определить время, если не знать, какая стрелка часовая, а какая — минутная?

(Считается, что положение каждой из стрелок можно определить точно, но следить за тем, как стрелки двигаются, нельзя.)

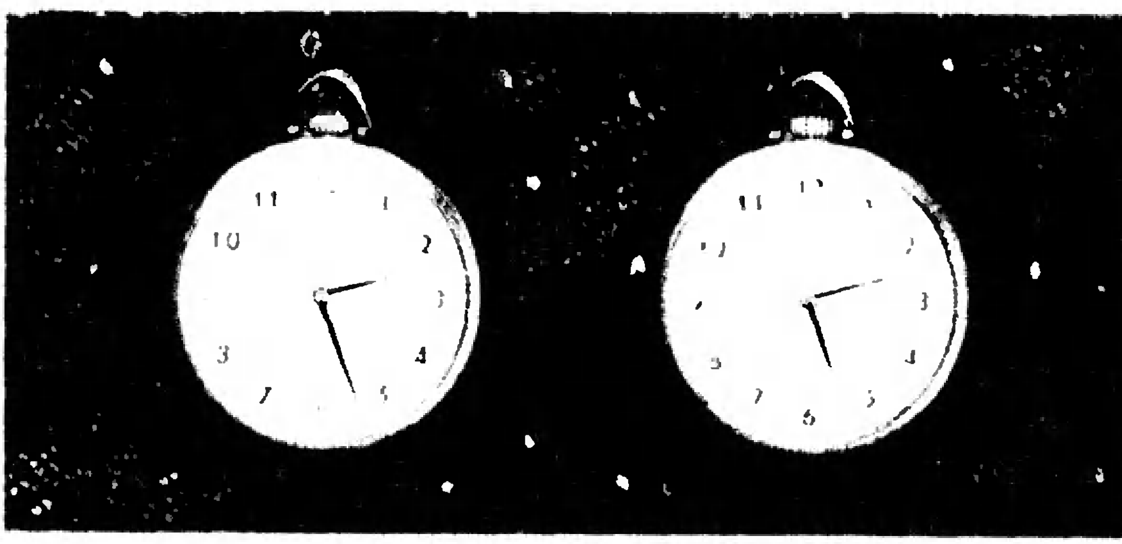
О т в е т. Таких положений существует 132. Другими словами, существует 66 пар расположений стрелок таких, что в каждой из этих пар одно расположение получается из другого заменой часовой стрелки на минутную и минутной на часовую (как на рис. 1); разумеется, при этом не рассматриваются такие положения, когда направления часовой и минутной стрелок совпадают: в этих случаях время определяется однозначно.

Р е ш е н и е. Мы получили много разных решений этой задачи. Приведем некоторые из них. Вот наиболее распространенное.

Будем считать, что циферблат разбит на 12 частей. Рассмотрим какое-то одно из положений стрелок, о которых идет речь в условии. Пусть одна стрелка занимает положение x, другая — y; здесь $0 \leqslant x < 12$, $0 \leqslant y < 12$. Если первую стрелку считать часовой, а вторую — минутной, то должно выполняться равенство

$$x = a + \frac{5y}{60}, \qquad (1)$$

Рис. 1.



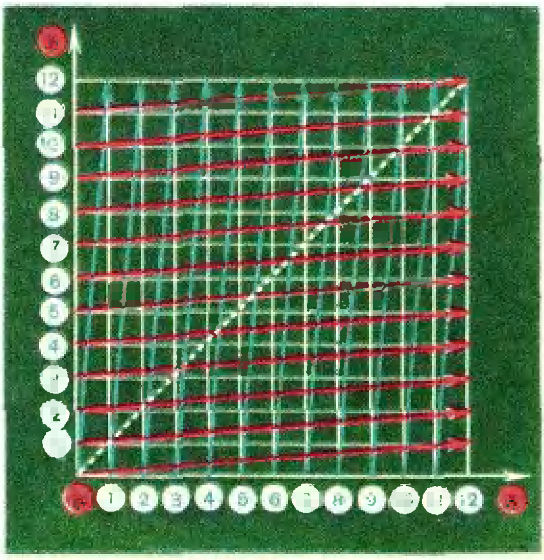


Рис. 2.

где a — целое число часов, $0 \leqslant a \leqslant 11$.

Аналогично, если первая стрелка минутная, а вторая — часовая, то

$$y = b + \frac{5x}{60}, \qquad (2)$$

где b — целое, $0 \leqslant b \leqslant 11$.

Систему из двух равенств (1) и (2) можно заменить на эквивалентные:

$$\begin{cases} 12x = 12a + y, \\ 12y = 12b + x, \end{cases} \quad \begin{cases} 12x - 12a = y, \\ 143x = 12(b + 12a), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12 \cdot \dfrac{b + 12a}{143}, \\[2ex] y = 12 \cdot \dfrac{a + 12b}{143}. \end{cases}$$

Здесь $0 \leqslant a \leqslant 11$, $0 \leqslant b \leqslant 11$ — целые числа. Каждая пара (x, y), удовлетворяющая этой системе, является ее решением. Их всего $12^2 = 144$. Ясно, что случаи, когда $x = y$, то есть когда $a = b$, нужно исключить. Остается 132.

Два из них — соответствующие $a = 2$, $b = 5$ и $a = 5$, $b = 2$ — изображены на рисунке 1 (ясно, что замена a на b и b на a соответствует замене стрелок).

Очень наглядное решение прислал ученик 10 класса *С. Поздняков* (*г. Вильнюс*). Вот его рассуждения.

Зададим положение минутной стрелки y как функцию от положения часовой стрелки x. График этой функции $x \to y$ изображен на рисунке 2 синим цветом. Этот график — множество всех положений стрелок (x, y), которые могут встретиться на циферблате часов. Нас интересуют такие пары (x, y), для которых пара (y, x) тоже принадлежит этому множеству. Но точка (y, x) — это точка, симметричная (x, y) относительно биссектрисы угла xOy. На рисунке 2 множество точек, симметричных синим точкам, отмечено красным цветом *).

Остается найти число точек пересечения синих и красных отрезков (не считая точек, лежащих на биссектрисе $x = y$). Легко видеть, что их 132, т. е. 66 пар точек, симметричных относительно биссектрисы.

И, наконец, еще одно, третье решение, не требующее никакого математического аппарата.

Положим рядом с нашими часами (справа) другие, воображаемые, которые идут ровно в 12 раз быстрее. Пустим и те и другие часы одновременно, когда они показывают 12 часов; тогда часовая стрелка правых часов все время совпадает с минутной левых. Ясно, что интересующие нас «неразличимые» положения стрелок — в точности те, когда часовая стрелка левых совпадает с минутной правых, быстрых часов (подумайте, почему!). Сколько же раз это произойдет? Из 144 оборотов, которые сделает минутная стрелка правых часов за то время, пока часовая стрелка «нормальных» сделает один оборот, на

*) Автор пишет, что «красное» множество — «график функции, обратной к нашей функции $x \to y$». Это не совсем верно: ясно, что наша функция не имеет обратной на всем отрезке $0 \leqslant x \leqslant 12$, так как здесь каждое y соответствует многим (а именно двенадцати) разным x. Можно было бы сказать так: мы рассматриваем функцию $x \to y$ на каждом из отрезков $0 \leqslant x < 1$, $1 \leqslant x < 2$, ..., $11 \leqslant x < 12$, берем обратную к каждой из этих функций и для каждой из них строим график. Вот тогда мы действительно получим «красное» множество, состоящее из *двенадцати* графиков! (Определение *обратной функции* см. в «Кванте» № 1, стр. 32—33.)

каждом обороте произойдет одно совпадение (включая начальную точку первого оборота); из них нужно исключить 12 случаев, когда совпадают все четыре стрелки, — остается 132.

М7. a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что
$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3.$$

Решение. Эта задача имеет довольно много решений. Мы приведем одно из самых коротких. Нам понадобится лишь хорошо известное из школьного курса неравенство
$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\geqslant 2, \qquad (1)$$
где $m>0$, $n>0$.

Введем такие обозначения:
$$\begin{aligned} b+c-a&=x,\\ c+a-b&=y,\\ a+b-c&=z. \end{aligned} \qquad (2)$$

Заметим, что
$$x>0,\ y>0,\ z>0; \qquad (3)$$
это следует из того, что a, b, c — стороны треугольника, а каждая сторона его меньше суммы двух других (к сожалению, из писем, присланных в редакцию, видно, что большинство решавших задачу даже не задумывались над тем, где они используют то, что a, b, c — стороны треугольника).

Из (2) следует, что
$$a=\frac{y+z}{2},\quad b=\frac{x+z}{2},\quad c=\frac{x+y}{2};$$
поэтому исходное неравенство можно переписать так:
$$\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}\geqslant 3. \qquad (4)$$

Преобразуя левую часть (4) и используя (1) и (3), получим
$$\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\right]\geqslant\frac{1}{2}(2+2+2)=3,$$
что и требовалось доказать.

Заметим, что аналогично можно доказать и более общее неравенство:
$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_n-x_1}+$$
$$+\frac{x_2}{x_3+x_4+\ldots+x_n+x_1-x_2}+\ \ldots$$
$$\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}-x_{n-1}}+$$
$$+\frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}-x_n}\geqslant\frac{n}{n-2},$$
где все знаменатели положительны.

В заключение отметим, что из доказанного неравенства непосредственно следует один геометрический факт. Пусть R — радиус описанной около треугольника, а r — радиус вписанной в него окружностей. Хорошо известно, что
$$R=\frac{abc}{4S},\qquad r=\frac{S}{p}, \qquad (5)$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
где S — площадь треугольника, а p — его полупериметр. Из (2) следует, что
$$\begin{aligned} p-a&=\frac{x}{2},\\ p-b&=\frac{y}{2},\\ p-c&=\frac{z}{2}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Теперь, используя (5) и (6), получим
$$\frac{R}{2r}=\frac{abcp}{8S^2}=\frac{abcp}{8p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$
$$=\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}=$$
$$=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz}=$$
$$=\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}\right)\right].$$

Заметим, что в круглых скобках правой части последнего равенства стоит левая часть неравенства (4). Воспользовавшись им, получим
$$\frac{R}{2r}\geqslant 1,\quad \text{то есть } R\geqslant 2r.$$

Итак, радиус описанного около треугольника круга не меньше диаметра вписанного в него круга. Попробуйте доказать это чисто геометрически (что значительно труднее).

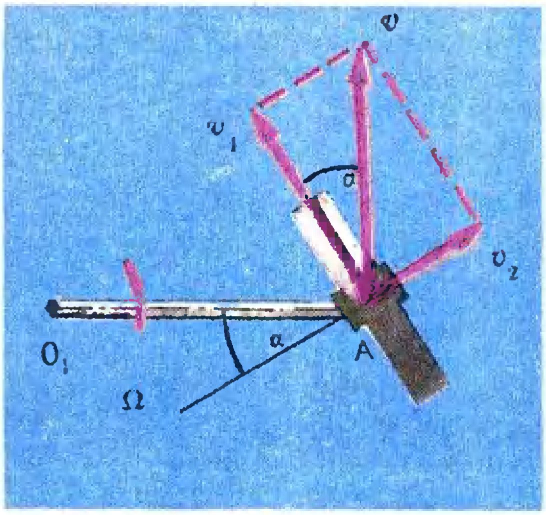


Рис. 3

Ф7. Горизонтальный стержень O_1A длиной l вращается вокруг вертикальной оси O_1 (рис. 3). На ось, прикрепленную к концу стержня A, насажено колесо радиуса r. Ось колеса горизонтальна и составляет угол α со стержнем O_1A. Колесо вращается на оси без трения и катится по земле. Трение между колесом и почвой большое. Сколько оборотов сделает колесо, когда стержень O_1A сделает один оборот вокруг вертикальной оси?

Решение. Задача решается проще всего, если рассуждать так, как рассуждал бы наблюдатель, сидящий на конце A стержня O_1A. Если угловая скорость вращения стержня O_1A относительно земли равна Ω, то наблюдатель скажет, что в его системе координат стержень неподвижен, а земля вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью, равной Ω, в направлении, противоположном направлению вращения стержня относительно земли. Скорость точки земли, в которой ее касается колесо, равна по величине $v = \Omega l$ и направлена перпендикулярно стержню O_1A. Разложим эту скорость на две составляющие: $v_1 = v\cos\alpha$ и $v_2 = v\sin\alpha$, соответственно параллельную и перпендикулярную плоскости колеса. Ясно, что так как трение колеса о почву велико, то точка колеса, в которой оно касается земли, движется относительно точки A, а значит и оси колеса, со скоростью v_1. Это означает, что колесо вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = \frac{v_1}{r} = \Omega\,\frac{l}{r}\cos\alpha$. Отношение углов поворота стержня и колеса вокруг своих осей равно отношению угловых скоростей вращения стержня и колеса. Поэтому, когда стержень O_1A сделает один оборот вокруг оси O_1, колесо сделает $n = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{l}{r}\cos\alpha$ оборотов вокруг своей оси.

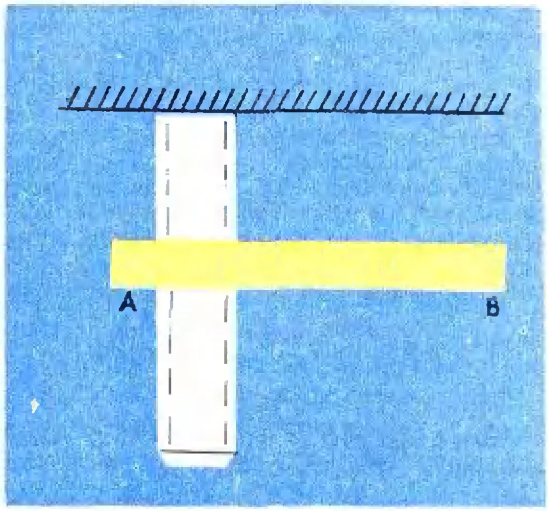


Рис. 4.

Ф8. Длинный стержень AB с резьбовым отверстием на конце накручен на вертикальный винт (рис. 4). Стержень отпускают. Трение между винтом и стержнем пренебрежимо мало. Как будет двигаться стержень после того, как он слетит с винта?

Решение. В тот момент, когда стержень слетит с винта, скорость его центра масс (центра тяжести) будет иметь как вертикальную, так и горизонтальную составляющие. Так как единственной силой, действующей на стержень, с этого момента будет сила тяжести, то центр масс стержня будет двигаться по параболе — траектории движения тела, брошенного под углом к горизонту с начальной скоростью, равной скорости движения центра масс стержня в тот момент, когда он слетел с винта. Но в тот момент, когда стержень слетел с винта, различные точки стержня имели различные горизонтальные скорости. Поэтому стержень будет еще и вращаться в горизонтальной плоскости вокруг своего центра масс.

Ф9. На горизонтальном столе находится грузик, прикрепленный к столу при помощи длинной пружины. Сначала пружина была не растянута. Затем грузик сдвинули на 20 *см* от положения равновесия и отпустили. Грузик начал колебаться вдоль пружины. За счет трения амплитуда его колебаний за период уменьшилась на 7%. Сколько всего колебаний совершит грузик до остановки? На каком расстоянии от положения равновесия он остановится?

Решение. Если на колеблющийся маятник действует постоянная внешняя сила, то она смещает положение равновесия маятника. Например, если сравнить колебания груза, прикрепленного к пружине и движущегося без трения по горизонтальной плоскости, с колебаниями этой же системы в вертикальной плоскости, когда на груз вдоль линии его движения действует сила тяжести, то мы увидим, что во втором случае положение равновесия груза будет дальше от закрепленного конца пружины на расстояние $x = \frac{mg}{k}$, где k — коэффициент жесткости пружины, а m — масса груза. При этом период колебаний груза будет в обоих случаях один и тот же.

Действие на маятник постоянной внешней силы не меняет периода колебаний маятника и не вызывает затухания его колебаний, так как половину периода действие внешней силы уменьшает энергию маятника, а вторую половину периода ровно на столько же увеличивает энергию маятника. Другое дело, когда, как в нашем случае, действующая на маятник сила постоянна только каждую половину периода, меняя через полпериода направление на противоположное. В этом случае колебания маятника затухают, так как при движении груза действующая на него сила всегда направлена в сторону, противоположную направлению его движения. Причем каждые полпериода колебания груза происходят около разных положений равновесия. При движении груза вправо положение равновесия — это точка A (рис. 5), так как сила трения, действующая на груз, направлена

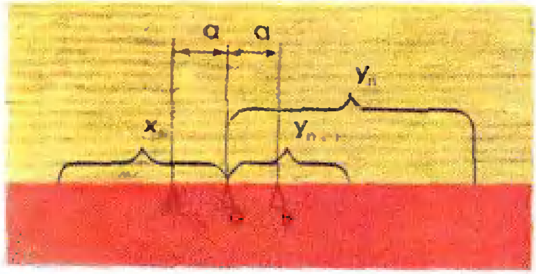


Рис. 5.

влево (сравните с колебаниями груза, подвешенного на пружине), а при движении влево — точка B.

Ясно, что точки A и B находятся на одинаковом расстоянии от точки O — положения груза при недеформированной пружине. Это расстояние находится из условия равенства действующих на груз силы натяжения пружины $F = k\Delta x$ (Δx — деформация пружины) и силы трения: $k\Delta x = F_{тр}$. Отсюда

$$a = AO = OB = \Delta x = \frac{F_{тр}}{k}.$$

Колебания груза не могут быть ограничены областью между точками A и B, так как в этой области сила натяжения пружины не превышает максимальной возможной силы трения. Поэтому, если скорость груза в какой-нибудь точке в этой области окажется равной нулю, то груз остановится: сила натяжения пружины будет уравновешена силой трения.

Обозначим амплитуду n-го колебания груза (отклонение груза от точки O) буквой y_n, если груз отклонен вправо от точки O, и x_n, если груз отклонен влево от точки O. $y_0 = 20$ *см* — начальное отклонение груза. По условию

$$\frac{y_0 - y_1}{y_0} = 0{,}07. \qquad (7)$$

Найдем закон изменения амплитуды колебаний груза. Изменение энергии системы при движении груза равно работе силы трения, поэтому, используя формулу для энергии деформированной пружины $W=\frac{k(\Delta x)^2}{2}$, можно записать, что

$$\frac{ky_n^2}{2}-\frac{kx_n^2}{2}=F_{\text{тр}}(y_n+x_n) \qquad (8)$$

и

$$\frac{kx_n^2}{2}-\frac{ky_{n+1}^2}{2}=F_{\text{тр}}(x_n+y_{n+1}).$$

Разделив обе части первого уравнения на y_n+x_n, найдем, что $y_n-x_n=2\frac{F_{\text{тр}}}{k}$. Аналогично из второго уравнения получим, что $x_n-y_{n+1}=2\frac{F_{\text{тр}}}{k}$. Сложив получившиеся уравнения, найдем, что

$$y_n-y_{n+1}=4\frac{F_{\text{тр}}}{k}. \qquad (9)$$

Но $\frac{F_{\text{тр}}}{k}=a$, поэтому $y_0-y_1=$

$$=y_1-y_2=\ldots=y_n-y_{n+1}=4a. \qquad (10)$$

Амплитуда колебаний груза за период уменьшается на одну и ту же величину, равную $4a$. Подставив в формулу (7) вместо разности y_0-y_1 равную ей разность y_n-y_{n-1}, получим, что $\frac{y_n-y_{n+1}}{y_0}=0{,}07$, или что за период амплитуда колебаний груза уменьшается на $0{,}07y_0=1{,}4$ *см*. Через n колебаний она станет равной $y_n=y_0-n\cdot 0{,}07y_0$. При этом амплитуда колебаний груза, как мы уже говорили, не может быть меньше, чем a. Так как, согласно формулам (7) и (10), $4a=y_0-y_1=0{,}07y_0=1{,}4$ *см*, то $a=0{,}35$ *см*.

Из условия $y_n\geqslant a$ или $20(1-0{,}07n)\geqslant 0{,}35$ получим, что $n\leqslant 14{,}04$. n — целое число. Поэтому груз совершит 14 полных колебаний.

Так как, $y_{14}=20(1-0{,}07\cdot 14)=0{,}4$ *см*, то есть $y_{14}>a$, и груз находится вне области между точками A и B. Поэтому действующая на груз сила натяжения больше силы трения, и груз совершит еще часть колебания, остановившись на расстоянии y от точки O. Причем груз не может дойти до точки O. При движении влево положение его равновесия — точка B, и груз не может отклониться до точки B на расстояние большее, чем $y_{14}-a\simeq 0{,}5$ *см*.

Путь, пройденный грузом до остановки, равен $y_{14}-y$. Энергия системы в точке, в которой остановится груз, равна $\frac{ky^2}{2}$. Приравняв разность энергий системы работе силы трения, получим уравнение $\frac{ky_{14}^2}{2}-\frac{ky^2}{2}=F_{\text{тр}}(y_{14}-y)$. Разделив это уравнение на не равную нулю разность $y_{14}-y$, получим, что $ky_{14}+ky=2F_{\text{тр}}$. Отсюда

$$y=2\frac{F_{\text{тр}}}{k}-y_{14}=2a-y_{14}=0{,}3 \text{ см}.$$

Ф10. Как из четырех тонких проволочных спиралей с сопротивлениями 10 *ом*, 20 *ом*, 30 *ом* и 40 *ом*, рассчитанных на выделение мощности не более 2 *вт* на каждой, составить нагреватель наибольшей возможной мощности, если имеется источник тока с э. д. с. 20 *в* и внутренним сопротивлением 20 *ом*?

Решение. Докажем вначале, что во внешней цепи выделяется тем большая мощность, чем ближе сопротивление нагрузки к внутреннему сопротивлению источника.

Ток в цепи, состоящей из включенных последовательно источника с э. д. с. ε и внутренним сопротивлением r и нагрузки с сопротивлением R, равен $\frac{\varepsilon}{R+r}$. Поэтому мощность, выделяемая на нагрузке, $W=\frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2}R$.

Нарисуем график зависимости W от сопротивления нагрузки R. При $R=0$, $W=0$; при $R\to\infty$ можно пренебречь r по сравнению с R в знаменателе дроби. Тогда $W\approx\frac{\varepsilon^2 R}{R^2}=\frac{\varepsilon^2}{R}$. То есть при больших R ($R\gg r$) график зависимости W от R — это гипербола, асимптотически приближающаяся к оси R. Так как функция $W(R)$ непрерывна, равна нулю при $R=0$ и убывает при $R\to\infty$, то она должна иметь максимум. Найдем его.

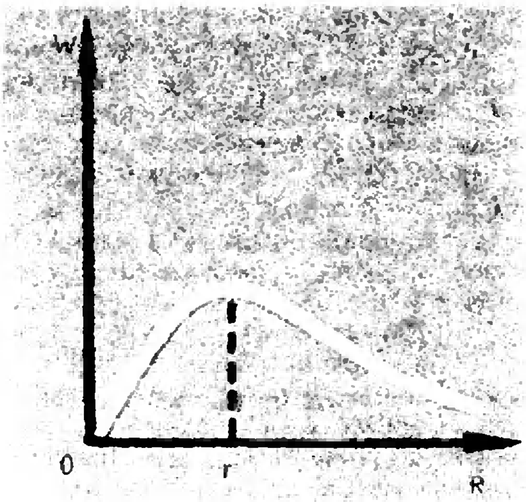


Рис. 6

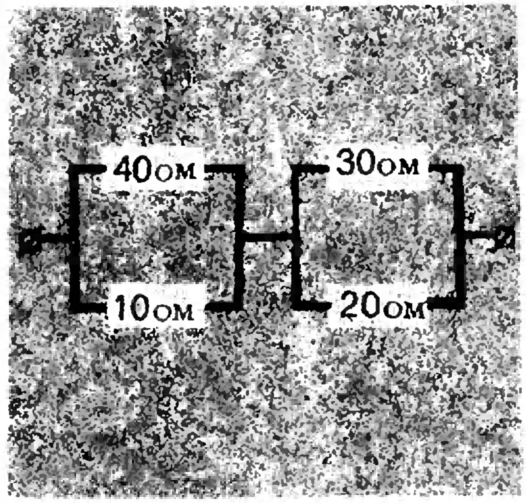


Рис. 7

Выражение $\frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$ максимально, когда обратное выражение $\frac{(R+r)^2}{\varepsilon^2 R}$ минимально. Но $\frac{(R+r)^2}{\varepsilon^2 R}=\frac{1}{\varepsilon^2}\times$ $\times\frac{R^2+2Rr+r^2}{R}=\frac{2}{\varepsilon^2}r+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(R+\frac{r^2}{R}\right)$. Это выражение минимально, когда минимально выражение $R+\frac{r^2}{R}$. Так как $R+\frac{r^2}{R}\geqslant 2\sqrt{R\cdot\frac{r^2}{R}}$ (соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел R и $\frac{r^2}{R}$), то $R+\frac{r^2}{R}\geqslant 2r$. Следовательно, минимум суммы $R+\frac{r^2}{R}$ равен $2r$ и достигается при $r=R$.

Итак, мощность, выделяющаяся на нагрузке, максимальна при $R=r$. График зависимости $W(R)$ показан на рисунке 6. Из графика видно, что $W(R)$ тем больше, чем ближе R к r. Это означает, что из спиралей нужно составить нагреватель с сопротивлением, как можно более близким к 20 *ом*. Использовать лишь спираль с сопротивлением 20 *ом* нельзя, так как при этом на ней будет выделяться мощность $W=\left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 R=5$ *вт*, а каждая из спиралей рассчитана на выделение мощности не более 2 *вт*.

Из всех возможных схем соединения спиралей наилучшая приведена на рисунке 7. Сопротивление такого нагревателя равно 20 *ом*, выделяющаяся в нагревателе мощность $W=\left(\frac{20}{20+20}\right)^2 20=5$ *вт*. Нетрудно подсчитать, что наибольшая мощность выделяется на спирали с сопротивлением 20 *ом* и равна 1,8 *вт*.

Очень хорошее решение этой задачи прислал Л. Воронов из г. Ярославля. В приложении к решению задачи он разобрал вопрос о том, как зависит к. п. д. электроустановки от сопротивления нагрузки.

Так как мощность, отдаваемая источником, равна $\varepsilon I=\frac{\varepsilon^2}{R+r}$, а полезная мощность, как мы получили, равна $\frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$, то, обозначив отношение $\frac{R}{r}$ через α, получим для к. п. д. η следующее выражение:

$$\eta=\frac{R}{R+r}=\frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

К. п.д. велик при больших сопротивлениях нагрузки, когда в цепи идет маленький ток. При $\alpha=0$, $\eta=0$; при $\alpha\to\infty$, $\eta\to 1$. При $\alpha=1$, когда в нагрузке выделяется максимальная мощность, $\eta=0{,}5$ (50%). При этом, конечно, в самом источнике выделяется такая же мощность, как и в нагрузке. Источник становится печкой.

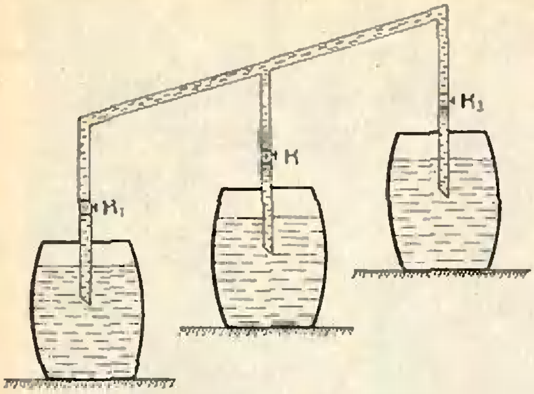


Рис. 8.

Увеличивая к. п. д. установки, мы одновременно уменьшаем полезную мощность, выделяющуюся в нагрузке.

Ф11. Три открытые бочки наполнены водой и установлены на разной высоте (рис. 8). Из каждой бочки проведены вверх трубки, соединяющиеся вместе. Трубки тоже заполнены водой. Куда будет перетекать вода по трубкам, если одновременно открыть краны K_1, K_2 и K_3?

Р е ш е н и е. Система из трубок будет работать как сифон. Из верхней бочки вода будет перетекать в среднюю и нижнюю. Кроме того, из средней бочки вода будет перетекать в нижнюю. Так как скорость перетекания воды по сифону пропорциональна разности уровней воды в сосудах, то в том случае, когда уровень воды в средней бочке ближе к уровню воды в нижней бочке, чем к уровню воды в верхней, в среднюю бочку из верхней будет перетекать больше воды, чем из средней бочки в нижнюю. В этом случае будут наполняться как нижняя, так и средняя бочки. Если же уровень воды в средней бочке ближе к уровню воды в верхней, чем к нижней, то будет наполняться лишь нижняя бочка за счет вытекания воды из верхней и средней бочек.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИИ

ПОЗНАКОМЬТЕСЬ СО ЗВЕЗДНЫМ НЕБОМ.

Нет необходимости доказывать, какую роль сыграла астрономия в развитии человеческой культуры. Звездное небо — это и часы, и календарь, и компас. Познав законы движения планет, люди открыли законы механики, а изучая звезды, поняли законы эволюции вещества во Вселенной и ее структуру. Формируя материалистическое мировоззрение, астрономия всегда была ареной ожесточенных идеологических боев науки с церковью. До сих пор астрономия приносит нам удивительные открытия. По-новому осветила интерес к звездному небу космическая эра.

Любые занятия астрономией начинаются со знакомства со звездным небом, с умения узнавать созвездия и наиболее яркие звезды. Движение небесной сферы, изменение вида звездного неба на разных широтах и в разные времена года — все это нужно понять, делая первые шаги в астрономии. Этой цели как нельзя лучше служит переведенная недавно на русский язык очень хорошая книга Г. Рея *). Как и многие другие книги, она предназначена для первого знакомства с небом, но отличается тем, что это первое знакомство очень тщательное. Если обычно авторы ограничиваются указанием наиболее ярких звезд и наиболее заметных созвездий, то Рей описывает созвездия целиком. Он по-новому соединяет линиями звезды созвездий так, что получающиеся фигурки наиболее точно соответствуют названиям созвездий. Мы узнаем в созвездии Близнецов двух человечков, а в созвездии Кита видим чудо-юдо рыбу кит. При этом в очертания созвездий включаются и слабые звезды, которые обычно ускользают от внимания. В этом есть и своя трудность. Из-за большой разницы в яркости звезд нелегко увидеть на небе те остроумные фигурки, которые так четко получаются в книжке. Яркие звезды навязывают глазу другой рисунок. Особенно это относится к светлому городскому небу, где звезды четвертой величины практически не видны.

После подробного описания созвездий в книге приведена серия карт звездного неба в разные часы всех двенадцати месяцев года. Все карты даны в двух видах: с очертаниями созвездий и «слепые», что облегчает запоминание картины звездного неба.

Во второй части книги объясняются причины и закономерности движения небесного свода, изменение характера движения звезд на разных широтах, движение Солнца по поясу зодиака, звездное и солнечное время. Тот, кто приступит к увлекательному занятию — изучению звездного неба, руководствуясь книгой Рея и его советом: как можно чаще выходить из дома и смотреть на небо, очень скоро почувствует себя грамотным астрономом-любителем.

Рей не рекомендует пользоваться биноклем, считая, что при знакомстве с очертаниями созвездий он мешает. Но мы думаем, что бинокль окажется полезным при первых наблюдениях, особенно в условиях города, где без бинокля практически не обойтись. Надо только не закреплять бинокль на штативе, а держать его в руках, тогда ограниченность его поля зрения не будет помехой для обозрения больших участков неба.

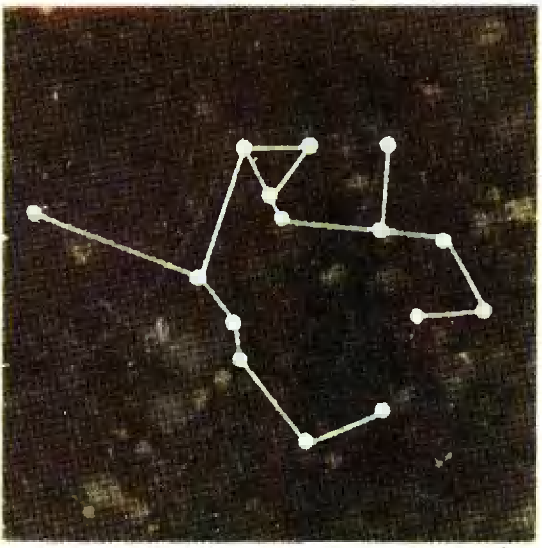
Книга предназначена для наблюдений невооруженным глазом. В ней нет описания двойных звезд, звездных скоплений, туманностей. Для следующего шага в астрономию уже с помощью телескопа необходимо воспользоваться другими книгами, но те, для кого книга Рея станет первым руководителем, несомненно попадают к хорошему учителю.

Г. И. Косоуров.

---

*). Г. Рей. «Звезды». Издательство «Мир», 1969.

Геркулес (человек с дубинкой)



Пегас (крылатый конь)

Кит

Изображения созвездий — старые (слева) и нарисованные Р. Реем (справа). Звезды одни и те же, различны только линии, соединяющие их.

Уголок коллекционера

Ученые в миниатюрной живописи

Коллекционирование почтовых марок широко распространено во всех странах мира. Для миллионов людей они стали яркими и убедительными документами эпохи, отражающими все многообразие жизни народов.

Собирателями марок были М. И. Калинин, А. М. Горький, академики И. П. Павлов, И. П. Бардин, такие деятели международного коммунистического движения, как В. Пик, Г. Димитров. Увлекались филателией президент США Ф. Рузвельт, премьер-министр Индии Дж. Неру, создатель теории относительности А. Эйнштейн и другие.

До недавнего времени в филателии господствовал хронологический принцип, то есть марки размещались в альбомах по странам в последовательности выхода их в свет. Однако в связи с непрерывным увеличением их выпуска такой метод вызвал определенные затруднения. Поэтому в последнее время распространилось тематическое коллекционирование.

У нас в Советском Союзе излюбленными темами стали: «Основоположники научного коммунизма К. Маркс, Ф. Энгельс, В. И. Ленин», «Жизнь и революционная деятельность В. И. Ленина», «СССР — могучая индустриальная держава», «Ученые нашей Родины», «Писатели нашей Родины», «Космос», «Спорт», «Флора», «Фауна» и другие.

Мы, естественно, будем рассказывать о марках, связанных с наукой.

На фотографии воспроизведена одна из больших серий, посвященная замечательным людям науки. Это оригинальные портреты прославленных отечественных ученых: знаменитого исследователя Камчатки *С. П. Крашенинникова*, великого математика *Н. И. Лобачевского*, создателя теории химического строения органических соединений *А. М. Бутлерова*, одного из основателей современного учения о фотоэффекте *А. Г. Столетова*, биолога и эмбриолога *А. О. Ковалевского*, путешественника и антрополога *Н. Н. Миклухо-Маклая*, выдающегося электротехника *П. Н. Яблочкова*, изобретателя первой в мире лампы накаливания *А. Н. Лодыгина*, знаменитого математика — первой в мире женщины профессора *С. В. Ковалевской*, гениального русского химика, открывшего периодический закон химических элементов, *Д. И. Менделеева*, ученого-биолога *К. А. Тимирязева*, прославленного физика, впервые обнаружившего световое давление, *П. Н. Лебедева*, выда-

При печати размер марок увеличен на 1/3.

ющегося изобретателя в области теории и техники реактивных аппаратов и воздухоплавания *К. Э. Циолковского*, основоположника эволюционной морфологии академика *А. Н. Северцова*, основателя физико-химического анализа академика *Н. С. Курнакова*, путешественника и исследователя Центральной Азии *П. К. Козлова*.

На советских почтовых марках изображены ученые не только нашей страны, но и других стран. Так, например, выпущены марки с портретами американского общественного деятеля и ученого В. Франклина, итальянского физика и математика Э. Торричелли, немецкого естествоиспытателя и географа А. Гумбольдта, английского естествоиспытателя Ч. Дарвина, французского физика и борца за мир Ф. Жолио-Кюри и многих других.

Из почтовых марок можно составить прекрасную портретную галерею великих ученых.

Расскажем об одной марке, посвященной великому русскому математику Н. И. Лобачевскому (1793—1856). Здесь изображена первая из двух вышедших марок, (вторая вышла к столетию со дня его смерти). Обе марки выполнены по рисункам художника В. Завьялова. Портрет на марке не похож ни на один из сохранившихся четырех портретов. Основой для него послужил фотоснимок (сделанный для голубого зала Казанского университета), о котором упоминается в рассказе сына Лобачевского, напечатанном в «Историческом вестнике». Он пишет, что фотоснимок сделан с портрета, «писанного в Казани Крюковым, когда отец был еще лет сорока, а звезда приписана впоследствии. На портрете волосы немного темнее, чем были на самом деле, и отец часто говаривал про Крюкова, указывая на портрет: «Хотел, видно, сделать брюнетом, да стыдно стало ...»

Отдел ведет А. В. Алтыкис

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Рассмотрим бесконечную десятичную дробь...»

Задача 1. Для всякого k дробь β и дробь, имеющая номер k, различаются в k-м знаке.

Задача 2. Строгое доказательство проводится индукцией по длине слова n. Нужно учесть, что слово длины n может быть получено из однозначно определяемого слова длины $n-1$ приписыванием впереди одной буквы. Если фиксировано слово длины $n-1$, то букву можно дописать k способами.

К статье «Электрическое сопротивление — квантовое явление»

1. По заданной величине скорости звука в железе $c=5200$ *м/сек* $=5{,}2\cdot10^5$ *см/сек* находим дебаевскую температуру θ по формуле: $\theta=\frac{hc}{k}\sqrt[3]{\frac{N}{4\pi}}$. Здесь постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-27}$ *эрг·сек*, постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-16}$ *эрг/град*. Чтобы узнать число атомов в единице объема N, нам понадобится еще плотность железа $d=7{,}9$ *г/см*^{3} и его атомный вес $A=55{,}85$ (эти цифры легко найти в школьном учебнике). Легко сообразить, что $N=N_0\frac{d}{A}$, где $N_0=6{,}025\cdot10^{23}$ — число Авогадро. Таким образом, для железа $N=\frac{6{,}025\cdot10^{23}\cdot7{,}9}{55{,}85}=$ $=8{,}5\cdot10^{22}$ атомов в *см*^{3}. Нашу формулу для температуры Дебая удобно записать в виде: $\theta=\frac{h}{k\sqrt[3]{4\pi}}\,c\sqrt[3]{N}=$

$$=\frac{6{,}62\cdot10^{-27}\cdot c\sqrt[3]{N}}{1{,}38\cdot10^{-16}\cdot2{,}32}=2{,}07\cdot10^{-11}\cdot c\sqrt[3]{N}.$$

Подставляя значения c и N для железа, получим для него дебаевскую температуру: $\theta=2{,}07\cdot10^{-11}\cdot5{,}2\cdot10^5\cdot4{,}4\cdot10^7=473^\circ$ K $=200^\circ$ C. В условии задачи удельное сопротивление было дано при температуре -100° C, то есть 173° K. Следовательно, в этих условиях $\frac{T}{\theta}=0{,}37$. Из обобщенной кривой (рис. 8) находим, что такому значению $\frac{T}{\theta}$ отвечает $\frac{R}{R_\theta}=0{,}30$. Отсюда для железа $R_\theta=$ $=0{,}198$ *ом·мм*^{2}*/м*.

2. Чтобы решить вторую задачу, нужно, изменяя масштаб по обеим осям, совместить кривую рисунка 1 с обобщенной кривой (рис. 8). Сделать это можно разными способами и лучше не искать общего рецепта, а воспользоваться конкретными особенностями кривых. В данном случае удобно то, что вдали от нулевой точки кривые становятся практически прямыми. Продолжая (экстраполируя) эти прямолинейные участки до оси абсцисс, приходим в точку $T=60°$K на рисунке 1 и $\frac{T}{\theta}=0,15$ на рисунке 8. Если считать кривые подобными, то это значит, что $\frac{60}{\theta}=0,20$, откуда $\theta=300°$K. Тем же способом, что и в предыдущей задаче, находим $N=8,5\cdot 10^{22}$ атомов в $см^3$ и для определения скорости звука получаем уравнение: $300=2,07\cdot 10^{-11}\,c\sqrt[3]{8,5\cdot 10^{22}}$, откуда $c=\frac{300}{2,07\cdot 10^{-11}\cdot\sqrt[3]{8,5\cdot 10^{22}}}=$

$$=\frac{300}{2,07\cdot 10^{-11}\cdot 4,3\cdot 10^{7}}=3,37\cdot 10^5 см/сек=$$

$=3,37$ *км/сек*. Экспериментальное значение по справочнику: 3,56 *км/сек*. Согласие между расчетом и опытом следует считать очень хорошим, если учесть, что, кроме теплового, есть еще структурное сопротивление и что для точного расчета требовалось бы знать еще детальную форму фононного спектра меди.

К статье «Вычисление сумм»

1. а) $\frac{100}{201}$; $F(k)=-\frac{1}{2(2k-1)}$;

б) $\frac{3n+1}{3(3n+2)}$; $F(k)=-\frac{1}{3(3k-1)}$;

в) $\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$; $F(k)=-\frac{1}{k^2}$;

г) $\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$; воспользуемся равенствами

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{2k}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(k+2)}\right)=\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2(k+2)}\right),$$

отсюда

$$F(k)=-\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}\right);$$

д) $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}$, $x\neq 2\pi n$;

воспользуемся равенством

$$\cos kx\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\right.$$

$$\left.-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right],$$

отсюда

$$F(k)=\frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}};$$

е) $\frac{\sin nx}{2\sin\frac{x}{2}}$, $x\neq 2\pi n$;

$$F(k)=\frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}};$$

ж) $\operatorname{ctg} 1°$; $F(k)=-\frac{\cos kx}{\sin kx}$;

используется равенство

$$\frac{\cos kx}{\sin kx}-\frac{\cos(k+1)x}{\sin(k+1)x}=$$

$$=\frac{\sin(k+1)x\cos kx-\sin kx\cos(k+1)x}{\sin kx\sin(k+1)x}=$$

$$=\frac{\sin x}{\sin kx\sin(k+1)x}.$$

2. а) Как в примере 5, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k=\frac{nq^{n+2}-(n+1)q^{n+1}+q}{(q-1)^2};$$

$$(q\neq 1),$$

б) пусть d — разность арифметической прогрессии, q — знаменатель геометрической. Воспользовавшись свойствами знака Σ, напишем:

$$\sum_{k=1}^{n}[a_1+(k-1)d]\,(b_1q^{k-1})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_1b_1q^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}b_1d(k-1)q^{k-1}=$$

$$= a_1 b_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + b_1 d \sum_{k=1}^{n} (k-1) \times$$

$$\times q^{k-1} = a_1 b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} +$$

$$+ b_1 d \, \frac{(n-1) q^{n-1} - n q^n + q}{(q-1)^2},$$

(заметим, что $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$)

3. а) $\frac{n^2 (n+1)^2}{4}$,

б) $\frac{1}{30} n (n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$;

в) $$\frac{\sin (n+1) x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{(n+1) \cos \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}};$$

$x \neq 2\pi k$;

г) $$\frac{(n+1) \sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1 - \cos (n+1) x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}},$$

$x \neq 2\pi k$;

К статье «Шарик вместо линзы»

Если R_1 и R_2 — расстояния от экрана с отверстием до источника света и до точки наблюдения, r — радиус отверстия, а m — число темных колец на дифракционной картине, считая и темное пятно в центре, то длина волны λ может быть вычислена по формуле

$$\lambda = \frac{r^2}{m} \, \frac{R_1 + R_2}{2 R_1 R_2}.$$

При выводе формулы пренебрегают квадратами малых величин $m\lambda$ и $r^2/2R_1$.

К статье «Внимание: в уравнении — параметр!»

В ответах указаны только те значения параметра, при которых уравнения имеют решения. Подразумевается, что при остальных значениях параметра уравнения не имеют решений. Во всех ответах, где встречаются n, k, подразумевается, что $n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

1. Если $a = \pm 3$, то $x = \frac{1}{2}$; если $a \neq \pm 1$, $a \neq \pm 3$, то $x_1 = \frac{a+1}{a-1}$; $x_2 = \frac{a-1}{a+1}$.

2. Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \geqslant 1$, то $x = \frac{(a-1)^2}{4}$.

3. Если $a \leqslant -4$, то $x = \frac{1}{16} (a^2 + 24a + 16)$.

4. Если

$0 \leqslant a < \frac{1}{2}$ или $a \geqslant 1$, то $x = \frac{a^2}{2a - 1}$.

5. Если $a \neq (2k+1)\pi$, то $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n - \frac{a}{2}$;
если $a = (2k+1)\pi$, то x — любое действительное число.

6. Если $-5 \leqslant a \leqslant 3$,

то $x = (-1)^k \arcsin (\sqrt{4 - a} - 2) + \pi k$.

7. Если

$a = \frac{4n}{4k+1}$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

8. Если $0 < a < 1$, $1 < a < 2$, $a = 3$, то $x = a + 2$; если $a > 3$ или $2 < a < 3$, то $x_{1,2} = a \pm 2$.

9. Если $1 < a < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < a < 2$, $a > 2$, то $x = a \pm 1$; если $a = 2$, то $x = 3$.

10. Если $a < 1 - \sqrt{13}$, то

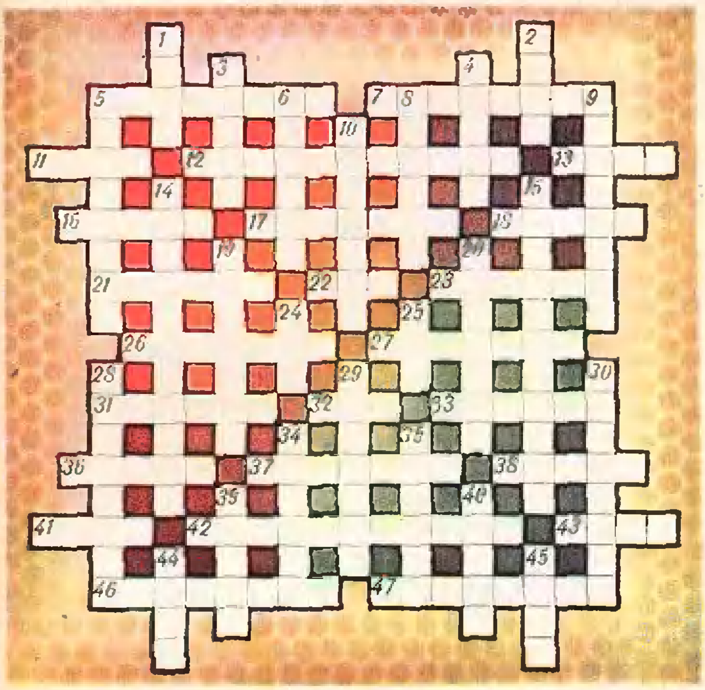
$$x = (-1)^k \times$$

$$\times \arcsin \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2 - a \pm \sqrt{a^2 - 2a - 12}}{2}} \right] + \pi k;$$

если $a > 8$, то

$$x = (-1)^k \times$$

$$\times \arcsin \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2 - a + \sqrt{a^2 - 2a - 12}}{2}} \right] + \pi k.$$



Ответ на кроссворд, опубликованный в № 8

По горизонтали:

7. Скаляр. 8. Орбита. 9. Индекс. 11. Нагрев. 13. Монада. 16. Расход. 18. Разряд. 20. Высота. 21. Тангаж. 22. Привод. 25. Магнит. 26. Скачок. 28. Каркас. 31. Евклид. 32. Эталон. 33. Амосов.

По вертикали:

1. Пеленг. 2. Работа. 3. Экран. 4. Пример. 5. Восток. 6. Стена. 10. Условие. 12. Акустик. 14. Долгота. 15. Причина. 16. Рецепт. 17. Довод. 18. Режим. 19. Диоптр. 23. Корень. 24. Кардан. 26. Синтез. 27. Анализ. 29. Колода. 30. Строка.

Кроссворд

По горизонтали:

5. Одна из декартовых координат.
7. Описание способа действий.
11. Измерительный прибор.
12. Известный советский тополог.
13. Живой генератор электричества.
16. Знаменитый французский физик и математик XIX века.
17. Поток воды в естественном водоеме.
18. Описание морей и их побережья.
21. Выдающийся французский астроном, математик и физик XIX столетия, председатель Палаты мер и весов в период введения метрической системы мер.
22. Образец.
23. Крупнейший советский физик.
26. Число, делящееся без остатка на другое число.
27. Замечательная линия в треугольнике.
31. Чувствительный элемент, источник информации.
32. Вещество в одном из своих физических состояний.
33. Линейка для проведения кривых.
36. Марка советской ЭВМ.
37. Величайший математик и механик древности.
38. Часть двигателя ракеты.
41. Внезапное приложение к телу внешних сил.
42. Соответствие элементов множеств.
43. Колебательное движение частиц.
46. Итальянский ученый XVIII—XIX столетий, которому принадлежит крупнейшее открытие в молекулярной физике.
47. Великий польский астроном.

По вертикали:

1. Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами.
2. Тончайшая материя, наполнявшая, по представлениям древнегреческих философов, мировое пространство.
3. Основное понятие арифметики.
4. Понятие из механики.
5. Синоним слова «множество».
6. Потайное устройство в механизме.
8. Масса льда, движимая силой тяжести.
9. Наибольшее значение функции.
10. Вид движения.
14. Одна из характеристик состояния тела.
15. Два проводника, разделенных диэлектриком.
19. Прибор, с помощью которого Фуко доказал вращение Земли.
20. Великий итальянский ученый, один из основателей точного естествознания.
24. Форма бублика.
26. Единица измерения времени.
28. Линия, изображающая процесс, при котором отсутствует теплообмен с окружающей средой.
29. Знак корня.
30. Часть прибора для регулирования уровня жидкости.
34. Аппарат.
35. Вид графа.
39. Собрание изображений и таблиц.
40. Листок с экзаменационными вопросами.
44. Выдающийся немецкий физик-теоретик.
45. Электрод.

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 9